Title	「新科学対話」の教材化による比例の指導(fulltext)
Author(s)	川村,栄之
Citation	数学教育論文発表会論文集, 45
Issue Date	2012-11-10
URL	http://hdl.handle.net/2309/138610
Publisher	日本数学教育学会
Rights	

第 45 回数学教育論文発表会論文集
論文発表の部

『新科学対話』の教材化による比例の指導

川村　栄之
東京学芸大学附属小金井中学校

要　約

本研究では，ガリレオ・ガリレイの『新科学対話(下)』(今野武雄・日田節次，1948)の「定理六」(pp.59-66)の教材化を提案してきた。その過程で，「定理三」(p.54)を利用すれば，生徒に実験データを比例とみてよいかどうかの議論をさせ，比例とみることのよさを生徒に感じさせることのできる教材になるのではないかと考えた。そして，本稿では，そのような教材を開発することを目的に，課題及び指導過程を考え，実践し，その分析から生徒はグラフが原点を通る直線になるかどうかや，表の変化の様子が一定であるかどうかということから，比例とみてよいかどうかを議論していたことが分かった。

キーワード：新科学対話，比例

1.　はじめに

(1)　これまでの研究との関連

この研究では，ガリレオ・ガリレイの『新科学対話(下)』(今野・日田訳，1995)に出てくる定理六(pp.59-66)と呼ばれる定理を教材化し，それを指導する過程を考案してきた。定理六とは，以下に述べるものである。

命題六　定理六

鉛直円上の最高点或ひは最低点から円周と交はる斜面を作る時，それらの弦に沿ふ落下時間は互に相等しい。

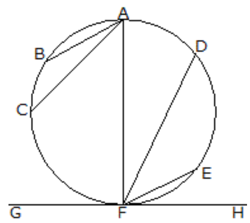

図 1 定理六

この定理六を中学校第 3 学年の 2 乗に比例する関数や相似な図形の知識を総合的に用いて解決する教材を考えた。(川村，2012)

その過程で，中学校第 3 学年の知識を用いて自力で証明できるように課題を構成する必要から，2 つの命題を実験結果から公理的に

認めて「仮定」として扱うことを提案した。

仮定(ⅰ)「球が降下する距離が時間の 2 乗に比例する」

仮定(ⅱ)「高さの同じ斜面を物体が降下するとき、降下にかかる時間は、斜面の距離に比例する」

そして，これらの仮定から演繹的に定理六の逆にあたる定理を導き,実験結果と照合し,許される誤差の範囲でこれらの結果が一致すれば，先においた 2 つの仮定は正しかったのだと結論づけるという考え方で，教材を構成した。

しかし，上述の仮定(ⅱ)だけでも，十分意外性があり，実験からこの結果を導いたり，この結果を使って問題解決したりできれば面白い。そして，その過程で比例とみてよいかどうかの議論ができれば，比例の性質について理解が深まるであろうし，比例とみることのよさを生徒に感じさせることができるのではないかと考えた。

(2) 目的と方法

以上から本稿の目的は，実験によって得られたデータを比例しているとみてよいかどうかという議論を生徒にさせ，比例とみることのよさを生徒に感じさせる教材を開発することである。

そのために，次の①～③の方法で進める。

① 仮定(ⅱ)に対しガリレイの証明，物理的な証明，実験の結果を述べ，実際に比例していることを示す。

② 上記の目的を達成できるような課題の設定の仕方や指導過程を考える。

③ ②の指導過程を実践し，生徒の解決過程やワークシートから目的が達成されたかどうかを考察する。

2. 仮定(ⅱ)の証明

(1) ガリレイの証明

『新科学対話(下)』(今野・日田訳，1995)では本稿で扱う仮定(ⅱ)を，以下の「定理三」の形で述べている。(p.54)

命題三　定理三

もし同一の物体が，静止から出立して，同じ高さの斜面や鉛直面に沿うて落下するならば，その落下時間は互に斜面の長さ対鉛直の長さの比に等しい比を成す。

ガリレイはこの定理三を以下に述べる 2 つの仮定と，命題一をもとに導いている。

仮定Ⅰ「速さの増加は，時間の増加に比例する。」(今野・日田訳，1995，p.16，p.30)

仮定Ⅱ「高さの等しいさまざまな斜面を同一の物体が下降する際に得る速度の大きさは等しいこと」(今野・日田訳，1995，p.30)

命題一　定理一

物体が静止から出立して，一様に加速される場合，それが任意の距離を進むに必要なる時間は同じ物体が同じ距離を，その速さが加速運動の始まる直前の速度と，最高の速度との平均値に等しい等速運動を行ふ場合の所要時間に等しい。(p.35)

まず，定理一の証明から述べていく。

[定理一の証明]

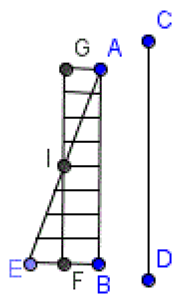

図 2 定理一

物体が等加速度で CD を通過する時間を AB で表し，その間に得た最高の速度を AB に垂直な線分 BE で表す。AB 上の各点から AE まで，BE に平行に引いた線分の長さは物体の各時点での速度を表す。

点 F で線分 BE を二等分し,点 F を通り BA に平行な直線と点 A を通り BE に平行な直線の交点を G とする。このとき，長方形 ABFG 内の平行線は一定の速度を表す。

この図で，三角形 AGI 内の平行線は，等加

速運動の最初の部分の速度 FB に対する不足なはずの運動量を表す。しかし，この不足分は三角形 IEF 内の平行線によって補われる。したがって，等加速度運動によって得られる最大の速度の半分の速度で等速運動を行うのと，もとの等加速度運動では，等しい時間内に等しい距離を通過する。

[定理三の証明]

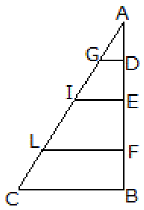

図 3 定理三

AC を斜面，AB を高さとする。GD，IE，LF を水平線 CB に平行な任意の直線とすれば，点 G と点 D，点 I と点 E，点 L と点 F のように対応する点において物体は同じ速さを得る。(仮定Ⅱより)故に，二つの距離 AC，AB は同じ速さをもって通過されることになる。点 C および B における速度を v とし，AB，AC を通過する時間をそれぞれ t_{AB}，t_{AC} とすれば，

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\frac{1}{2}vt_{AC}}{\frac{1}{2}vt_{AB}}=\frac{t_{AC}}{t_{AB}}$$

である。(定理一より)

(2) 物理的な証明

仮定(ⅱ)は高校物理の知識を使えば，より簡単に証明することができる。

図 3 において，AB，AC に沿って降下する時間をそれぞれ t_{AB}，t_{AC}，重力加速度を g とする。物体が斜面 AC 方向に降下するときの加速度は $\frac{AB}{AC}g$ であるから，

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\frac{1}{2}\frac{AB}{AC}gt_{AC}^2}{\frac{1}{2}gt_{AB}^2}$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{t_{AC}}{t_{AB}}$$

(3) 実験による確認

(1), (2)で斜面の距離と降下時間が比例していることが証明できた。この斜面の距離と降下時間が比例するという結論を実験してみるとどうであろうか。ガリレイの方法もそうであるが，演繹によって得た結論と実験の結果が，もし一致しなければ，初めにおいた仮定を見直す必要がある。

実験で使ったのは，鋼球，レール，ストップウォッチ，スタンドである。レールをスタンドの腕に乗せ, 高さが 30 ㎝になるようにスタンドの腕を固定した。そして，レールの長さを 40 ㎝から 10 ㎝ずつ伸ばしながら鋼球が転がり落ちた時間をストップウォッチで測定した結果が表 1 である。

表 1 実験結果(単位は距離が m，時間が秒)

距離	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
時間	0.46	0.58	0.72	0.84	1.01	1.19	1.32	1.46
距離	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	
時間	1.64	1.77	1.89	2.02	2.12	2.26	2.40	

これを，グラフに表わしたのが図 4 である。グラフを見ると，ほぼ原点を通る直線の近くに点があることが分かる。したがって，(1), (2)の演繹によって得られた結論と実験結果は一致しており，初めにおいた仮定もこの実験によって否定されることはなかった。

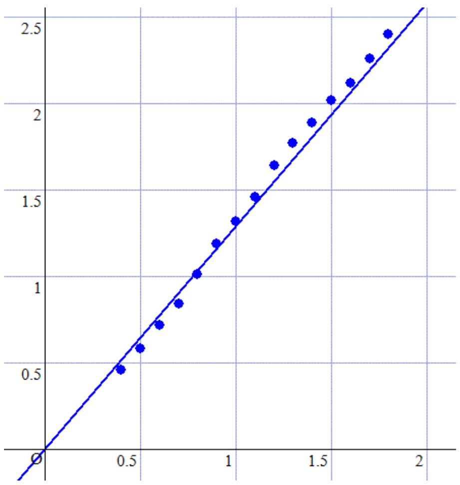

図 4.実験結果のグラフ

3.　仮定(ⅱ)を使った比例の授業

(1) 授業の計画

① 単元　第 1 学年「比例と反比例」

② 実施計画

[日時]平成 23 年 11 月 4 日，8 日

[対象生徒]

国立大学附属中学校第 1 学年 39 名(男子 20 名，女子 19 名)

[指導計画]全 20 時間

第 1 次	関数関係	4 時間
第 2 次	比例とそのグラフ	7 時間
第 3 次	反比例とそのグラフ	5 時間
第 4 次	比例と反比例の利用	4 時間

(本実践は 3，4 時間目)

③ 課題について

仮定(ⅱ)の斜面の長さと降下時間が比例していることを実験によって確かめるだけでは，目的のない作業になりかねないし，比例とみるのではなく，比例であることを確かめることになり，本稿の目的から外れてしまう。そうではなく，解決すべき問題を与えその解決のために比例関係を見出し使うという流れにしたいと考えた。

そのためには，直接は求めにくいものを，比例とみることを利用して求めようと生徒が思うような課題にしなくてはならない。そのような課題として以下の課題を設定した。

20 ㎝の高さから球を落とした。球が地面に落ちるまでの時間を求めよ。

実際に 20 ㎝の高さから球を落とすと，球が落ちるのが速すぎて，手動で落ちる時間を測るのは難しい。球が落ちる時間を求めるために，高さ 20 ㎝の斜面をいろいろに作って，斜面の距離と降下時間の関係を考察することで，球が落ちる時間を求めようという課題にすることを考えた。

④ 授業で意図すること

本実践のねらいは，本稿の目的で述べたように実験によって得られたデータを比例しているとみてよいかどうかという議論を生徒にさせ，比例とみることのよさを生徒に感じさせることである。

このねらいを達成するために，実験データも生徒が実際にとり，そのデータを利用して 20 ㎝の高さから球を落とした時にかかる時間を求めることにした。自分たちでとった実験データなので誤差が生じ，正確に比例しているとは言えない。これを比例しているとみてよいかどうかは，生徒によって分かれるところであると考えた。その考え方の違いを，生徒に議論させるために，実験から結論を出すまで班ごとに話し合って，班で 1 つの結論を出すようにした。

比例とみてよいかどうかを議論するには，比例とはどんなものであるかという，比例の定義や性質によらなければならない。したがって，議論の中に比例の定義や性質が現れてくるものと考えられる。議論のために比例の定義や性質を使うので，比例の定義や性質の理解が深まるものと考える。

(2) 授業の概要

① 第 1 時

第 1 時では，はじめに球とものさしを提示し，20 ㎝の高さから落としたときに，球が落ちる時間を測ってみようと投げかけた。実際に測るのがどれだけ難しいか，生徒に体験さ

せるために，2，3 人の生徒にストップウォッチを渡して測らせた。測った生徒は，球が落ちるのが速すぎて,ボタンが押せなかったり，押し遅れたりしており，手動で測ることの難しさを感じさせることはできたと思われる。

その上で，間接的に落下時間を求める方法として,高さ 20 ㎝のいろいろな距離の斜面を作って，斜面を降下する時間を測定してみることを教師から提案した。この実験に関して，実験は班ごとに行い，どのような役割分担をするか指示を出した。役割は，記録，計算，タイム測定，球を転がす，スタンド・レールの調整を分担させた。そして，最後に実験データからどのように考えて結論を出したか説明してもらうことを生徒に伝え，実験に必要な道具やグラフ用紙を生徒に渡したうえで実験に入った。生徒に渡した道具は，鋼球，レール，スタンド，ストップウォッチ，電卓である。

第 1 時では，すべての班の実験は終わったが，班によって結論を出せていない班も多かったので，次時の初めに班ごとに話し合う時間をとることにして，この時間は終わりにした。

② 第 2 時

第 2 時では,初めの 15 分ほどを班ごとの話し合いの時間に使い，各班で何らかの結論を出させた。

その後，6 つの班が順に発表していった。発表の方法は，その班で考えるために使ったノートやグラフを写真に撮り，それをプロジェクターで投映し,それを使って発表させた。発表の後には，質問をする時間を設け，できる限りお互いの意見を理解しあえるように配慮した。

6 班のうち,5 班は比例とみて問題を解決していた。一方，1 班は比例とは言えないとして,実際に 20 ㎝の高さから球を落とした時の時間を測り，それを答えとしていた。

4. 考察

(1) 比例とみて問題解決した班

斜面の距離と降下時間が比例しているとみて，問題解決をした 5 班は大まかに分けると以下の 3 通りの方法で解決していた。

A) 一方を n 倍すると，もう一方も n 倍になることを使う。(2 班)

B) $\dfrac{y}{x}$=(比例定数)で一定になること。(1 班)

C) 平均の速さを求め，その速さで 20 ㎝降下した時の時間を求める。(2 班)

これらの班も，何も考えずに比例を前提としていたわけではないと考えられる。例えば，A)の方法を用いた班の発表後に，教師がなぜその方法を使ったのだろうかと問うと，生徒からは「距離とタイムが比例していると考えたから。」という反応があった。また，B)やC)の方法を用いた班も，「比例していると決めつけた」や「これら(距離と時間)の値をグラフにしていくと，このように(図 5)ほぼ直線になったので，比例だと断定してしまいます。」のように，比例しているとみなした過程が言葉として表れている。そして，「ほぼ直線になったので」という発言から，グラフが直線になるという比例の性質が，比例とみた根拠の一つになっているようである。

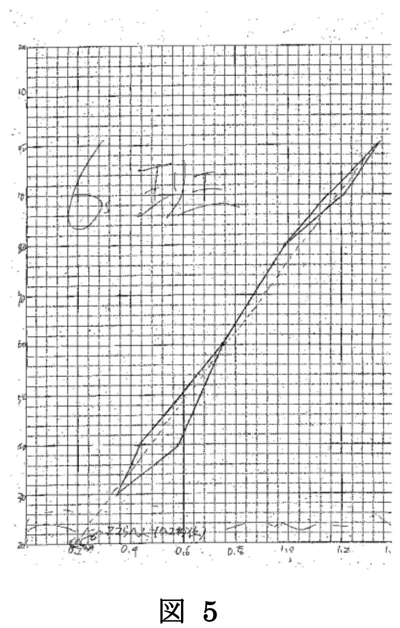

図 5

(2) 比例とは言えないとした班

斜面の距離と降下時間が比例とは言えないと判断した班については，その話し合いのプロトコルを分析した。その結果，比例とみてよいかどうかの話し合いの中に，グラフが原点を通る直線になるかどうか，表を横に見た時の変化の仕方が一定になるかどうかの 2 つの点についての発言があった。

① 原点を通る直線になること

この班では，グラフ上で原点と 120 ㎝の斜面を作った時の点を直線で結び，その直線に対して 90 ㎝の斜面を作った時の降下時間が大きくずれていることについて以下のように話し合いがされている。

C3:これ 40 までは正確だったんだよ。
C1:ここ直線で結ばない。
C4:消せるほうがよくない？
C2:長い定規必要だ。(原点と端の点を直線で結ぶ)
C3:ここの誤差を測りなさい。
C1:そこ誤差だよな，絶対。
C2:すげーよな、この誤差。悲しいなこれ。これ(長い距離のほう)はこっち(直線より上)でやばいよ。やっぱ 90 がおかしいんだよ。
C4:じゃあ 90 測り直す？

（中略）

C4:ねぇ。90 いく？
C4:90 いきまーす。
C3:1 秒 20
C2:おー
C1:お，よくなってる。

このように，グラフが原点を通る直線になれば比例しているとみられるのだから，何とかして比例とみられないかと，試行錯誤している様子がうかがえる。このことから，比例とみれば，問題も簡単に解決できそうだと，比例とみるよさも分かっていたのではないかと考えられる。

② 表の横の変化が一定になること

これも，表を見ながら比例とみられそうだということから，次の発言がされている。

C2:これね，なんで比例っぽくなってるか理由は分かるんだよ。0.33，0.43，0.53 って完璧に 0.1 ずつ上がっているっていう規則がある。なのに次から崩れちゃう。

このように，グラフが直線になることと本質的には同じであるが，変化の割合が一定であるという比例の性質も話し合いに使われていることが分かる。

5. 本実践の成果

本稿では，実験によって得られたデータを比例しているとみてよいかどうかという議論を生徒にさせ，比例とみることのよさを生徒に感じさせる教材を開発するために，ガリレオ・ガリレイの『新科学対話(下)』の定理三を用いることを提案した。

定理三を利用する課題として，「20 ㎝の高さから球を落とした。球が地面に落ちるまでの時間を求めよ。」という課題を用いて，実践したところ，生徒はグラフが原点を通る直線になるかどうかや，表の変化の様子が一定であるかどうかということから，比例とみてよいかどうかを議論していたことが分かった。

また，生徒は何とかして比例とみようとしていたことから，比例とみれば問題が簡単に解決できそうだと，比例とみるよさも感じていたと考えられる。

参考・引用文献

川村栄之（2012），「ガリレオ・ガリレイ『新科学対話』の教材化について」，学芸大数学教育研究 第 24 号，pp.45-54

今野武雄・日田節次（1948），「新科学対話(下)」，岩波書店