修士論文要約

証明に基づいた発展的な図形教材に関する研究

柴田　翔

本研究の目的は，証明に基づく発展性のある図形教材を開発することである．そのために，本研究では，証明に基づく発展的な学習をDe Villiersの指摘する証明の機能とS.I.Brownらの指摘するWhat-If-Not方略との比較を通して，方向付けを持ったWhat-If-Not方略と特徴付けた．そして，設定した問題を探究し，反省的に考察することで，探究の過程で行われた行動，学習しうる性質などを明らかにした．その結果，開発した教材とその探究は，教育的な意義があり，また，証明に基づく発展的な学習指導の特徴付けが適切であったと評価した．

序　研究の目的と方法

学問は単なる知識の集まりではなく，相互に関連を持った集合をなしている．特に数学という学問は,公理を実際では起こりえない,明らかに偽であるような命題に設定しても，それらの公理が違いに独立し，無矛盾であれば，体系を作ることができ，それらの体系について考察を行っていくことが可能である．このようなことを可能としているのは，数学という学問が，公理や無定義術語だけを基に証明を用いて体系を作っていくからである．勿論，数学において扱われる命題のうち，実験や直観などによって発見されたものも多いが，それらの知識を互いに関連付け，数学という学問の根底を支えているのは，証明であると考えている．

このような数学観から，筆者は生徒に，数学という教科が既知の事実や，前提を基に，証明を用いることで，新たな知識を作り出していくことのできる教科であると感じて欲しい．そして，証明という行為を，自身の問題の探究に役立てることのできる生徒になってもらいたいと願っている．

しかし，今日の数学教育は上の願いに対して,明確な成果を上げていない(これに対して国宗の一連の研究がある．国宗;1987, 1994, 2000)．それは，つまり「なぜ証明をしなければならないのか」という生徒の疑問に対して，教師が，生徒が納得しうる解答を用意できていないこと，あるいは，教師の解答に対して生徒が納得していないことを示している．このことについて，宮崎(2002)は帰納などによる方法では命題の全称性を確立できないことを理由に証明の必要性が強調されてきたが，生徒は帰納によって命題が真であることを認めやすく，また，テクノロジーの利用が進むにつれて，帰納や検証の正確さや手軽さが高まり，生徒に命題の全称性の確立に関して，演繹が帰納や検証に比べて優位であることを強調することは，以前にもまして一層困難となっていることを指摘している．

なぜ,証明を行うのかという問いに対して，杉山(1986)は，証明はその対象となる命題の本質を表しており，証明を振り返ることで，その命題の本質を見極めることができ，それによって命題を発展的に考えていくことが可能となることを指摘している．では証明を振り返る活動を，具体的にどのように展開すればよいのだろうか．筆者の経験上，授業の中で証明を振り返る活動を取り入れても，命題の本質を見出すことができない生徒もいる．むしろ，そのような生徒が多数を占めるのが現状である．では，証明を振り返るとは実際に何を行うべきなのか，そもそも，証明を振り返る活動の特徴とは何なのか．

筆者は，証明の意義に関して，杉山(1986)が一定の解答を与えていると考える．そして，この杉山(1986)は筆者の問題意識に対しても解答を与える．しかし，現状として，それらが成果として現れないのは，証明に基づく発展的な学習指導，あるいは証明を振り返るという行為に，明確な特徴付けが行われていないからだと思われる．

そこで，本研究の目的を，証明に基づく発展的な学習指導の特徴付けを行い，それを基に教材を開発し，それらを探究する過程で，どのように探究が展開されうるかを示し，証明に基づく発展的な学習指導の特徴付けの正当性と，教材の価値を述べることを本研究の目的とする．目的達成のために，以下の４点

を課題とする.(1)証明指導の目的と問題点を明らかにする,(2)問題点に対して,証明に基づく発展的な学習指導の意義を述べ,その特徴付けを行う,(3)原題を探し,実際に探究する,(4)探究を反省的に考察することで,証明に基づく発展的な学習指導の特徴付けの正当性と,提示した教材の価値を示す.

1 証明指導の課題

証明指導の課題を明らかにするために,まず,学校数学における証明の意義について明らかにする.平成20年度告示学習指導要領,及びその解説においては,以下の3点の意義が意図されている.

(1)ある性質が真であることを示す方法

(2)論理的に考察し表現する方法

(3)証明をよむことで新たな性質を見いだす.

de Villiers(1999)は証明の機能として6つのことを指摘している.

(1)立証の方法としての証明(ある性質が真であることを示す方法)

(2)説明の方法としての証明(論理的に考察し表現する方法)

(3)体系化の方法としての証明(論理的に考察し表現する方法)

(4)発見の方法としての証明(証明をよむことで新たな性質を見いだす方法)

(5)コミュニケーションの方法としての証明(論理的に考察し表現する方法)

(6)知的な挑戦の方法としての証明

本研究においては,De Villiers(1999)の指摘する「立証」,「説明」,「体系化」,「発見」,「コミュニケーション」,「知的な挑戦」の6つの機能を証明の意義として捉えることにした.

その上で,証明の指導の課題として,(1)証明の定義とも言える,「立証」の理解の困難性が指摘されていること,(2)テクノロジーの発達により,「立証」としての証明が,命題の全称性の確立において,帰納や検証などに比べて有為であると言えないこと,(3)「発見」の機能について生徒の理解度が低いことの3点を指摘した.筆者は研究の意図と目的でも述べたように,生徒が数学を作っていくことを大切にし,生徒に,数学という教科が既知の事実や,前提を基に,新たな知識を作り出したり,今までの知識をより深めたり,関連に気づいていくことのできる教科であると感じて欲しい.そして,証明を基にすることで,数学を作り出していくことができるということを強調したい.

2 証明に基づく発展的な学習指導の意義とその特徴付け

(1)証明に基づく発展的な学習指導の意義

先に記した筆者の考えは「発見の機能としての証明」に着目することで,達成できる.そこで,「発見の機能としての証明」として,杉山(1986)に基づき証明に基づく発展的な学習指導の意義について述べる.

杉山(1986)は公理的方法による指導として,根拠を探ることと仮設をおいて考えることを挙げ,それによって「数学を創造し,発展させていくように数学を学習させることができる」(p.16)ようになることを主張している.

特に論証指導については,従来の指導や研究の中には「公理を求めて公理的な体系に整理するという考えは見られない.」(p.113)こ

とを指摘し，証明の役割には「真なることを主張する」ことの他にも「真なることを保証する要素を分析して示す」ことがあることを次のように示している．

「ある判断があるとき，その真なることを確かめるだけに止どまらず，その真なることを保証する要素を分析して示すことにも，証明の役割があると考えるのである．ある領域についてのあらゆる判断を分析し続けていこうとすれば，そこには体系を作る必要も生まれてくるはずである．」(p.127)

そして証明の狙いを「要素を分析する」，あるいは「説明の体系を求める」ことにあると考えるべきであることを，次のように主張している．

「公理的方法も，生徒が知らない新しい事実を説明し，納得させるためのものとしてではなく，生徒が経験的に見つけた事実や予想される判断の真なることを確かめ，その要素を分析し，その分析された要素に基づいて諸命題を構成しつつ体系を作り上げていく方法と見るべきであろう．」(p.127)

そして，このような論証指導のよさとして，「証明の述べ方が丁寧になり，論理が厳密になってくる」こと，「分析の結果得られた要素の間の関係を調べることによって，体系を作ることの動機，あるいは体系のよさに対する理解が与えられる．」ことを挙げている．

また，「仮設(公理)をおいて考える」ことについては，次のように述べている．

「証明をこのように見ることにより，論証指導の問題点のいくつかを解決すると同時に，分析して求めた要素をもとに発展的に考察すれば，新しい事実や新しい問題を見つけたり，統合する観点を求めたりすることができる例をいくつか考えた．この考えは，公理的方法のもう一つの考えである「仮設(公理)をおいて考えること」に通ずる．」(p.155)

そして，「仮設(公理)をおいて考える」考えに重点をおき，数学的構造に着目することで，「知識の獲得を有効なものにしたい」(p.188)と述べている．このときの知識の獲得に関係して次の二つを前提としている．

「一つは，知識の獲得は，(中略)単なる機械的な丸暗記ではなく，既にもっている知識と関連付け，調整されなければならないということである．」(p.188)

「知識の獲得についてのもう一つの前提は，知識の獲得は他から与えられるだけでなく，あとでとりあげるように，子ども自ら情報の乗り越えによって行い得るということである．」(p.188)

これらの公理的方法を考える立場として，「単に論証ができればよいとか，ある種の数学的構造が理解されればよいとかということにあるわけではない．根拠を求め，基づいている原理・法則を明らかにし，確かな知識を得ることを目指すとともに，それらをもとに発展的，創造的に学習を進めることを大切にしたい．」(p.217)と述べている．

したがって，証明に基づく発展的な学習指導の意図として，証明によって，根拠を求め，基づいている原理・法則を明らかにし，確かな知識を得ることだけでなく，それらをもとに発展的，創造的に学習を進めることを意図していることが分かる．また，その際の発展的，創造的とは，「新しい事実や新しい問題

を見つけたり，統合する観点を求めたりすることができる」(p.155)ことであり，「意味のある知識が得られたり，見通しがよくなったり」(p.138)することである．「新しい事実や新しい問題を見つけ」ることを，「新たな性質の発見」，「統合する観点」や「見通しがよくなる」ことを「性質の関連」，「意味のある知識」を「問題の本質的な理解」とし，これら3つの観点から，証明に基づく発展的な学習指導の意義を杉山の挙げる「7の倍数の判定法」，「角の二等分線」，「平行四辺形」について分析した．

証明を振り返ることで，新たな問題を作り，新たな性質の発見を行うことができること自体にも価値を認めつつ，新たな問題と元の問題の関連や，元の問題の本質的な理解に繋がることを述べてきた．

しかし，証明の指導は未だに，困難であるとされているし，実際に生徒の理解も進んではいない現状がある．それは，証明という学習内容自体の困難さもあると思われるが，それだけではなく，証明することの意味を生徒に伝え切れていないのではないかと思う．それは，証明の意義の理解の低さなどから読み取ることができる．しかし，証明に基づく発展的な学習を生徒ができるようになったならば，根拠を明らかにするための道具として，証明の意味は理解されるはずである．

(2)証明に基づく発展的な学習指導の特徴付け

証明に基づく発展的な学習指導を特徴付けるために「証明の機能」(de Villiers, 1999),「What-If-Not」(ブラウンら，1990)との比較を行う．比較の対象として，この2つを選んだのは，「証明の機能」が証明自体に焦点を当てており，「What-If-Not 方略」が問題を作り替えることで，深い理解につながることを指摘しているからである．

(2)-1「証明の機能」との比較

De Villiers(1999)が挙げている具体例の概要は以下の通りである．(以下筆者訳，要約)

たこ型の辺の中点をとってそれらを結ぶと，EFGHは常に長方形になるという性質がある(図1).

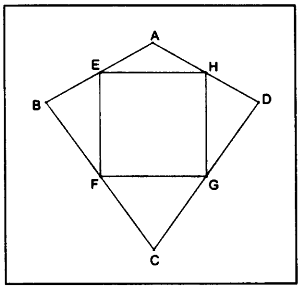

図1　たこ型の中点によってできる四角形

これに演繹的な証明を与えたら，ただちに，対角線の直交が，この結果の依存する本質的な特徴であり，そのために，隣の辺の長さの等しい性質は必要ではないことに気づく．言い換えればただちに，この結果を，次に示されるような対角線の直交した四角形へと一般化することができる(図2).

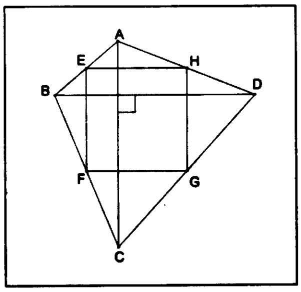

図2　対角線の直交する四角形

しかし，一般の結果は，完全に元の仮説の経験的な探究によっては得ることはできない．経験的な探究はよく知られた四角形，平行四辺形，長方形，ひし形，正方形，等脚台形のようなものに制限するだろうから，様々な種類の四角形の体系的で経験的な探究でさえも，多分この一般の場合の発見を助けはしない．(以上，筆者訳，要約)

概要は以上である．結論を成立させている，たこ型四角形から，より条件を緩くした対角線の直行する四角形でも，中点を結んだ四角形が長方形となることが成立することを証明を通して発見したと述べている．

その際の，証明が述べられていないので，筆者なりの証明を以下に示す．

中点連結定理より，

$EF=\dfrac{1}{2}AC$，$GH=\dfrac{1}{2}AC$ となり，

$EF=GH$ である．

同様に $EH=GF$．

ここまでで平行四辺形であることがわかる．

AC，BD の交点を O として，△AOB=△AOD を示し B，O，D が一直線，つまり∠BOD=180° から，

∠AOB=∠AOD=90° を示すことができる．

さて，この証明を筆者が考えたときは，平行四辺形であることは，中点連結定理を用いれば容易く示すことができるが，直角であることを示すには，どのように示せばよいだろうかと少し考えた．実際，これ以外の方法でも直角を示すことはできる．しかし，証明を通して，新たな命題を発見している点は，証明に基づく発展的な学習指導と同じと言えよう．

一方で相違点もある．それは「これに演繹的な証明を与えたら，ただちに，対角線の直交が，この結果の依存する本質的な特徴であり，そのために，隣の辺の長さの等しい性質は必要ではないことに気づく」の中の「ただちに」の部分である．証明に基づく発展的な学習指導では，証明を行った後に，その証明を見返すことによって，新たな性質などを考えていくことである．したがって，ここで述べられている「ただちに」という言葉は多少不適当にも感じる．そこで，もう一度，証明をよく見てみる．すると，平行四辺形であることは中点連結定理を用いれば，すぐに示すことができるが，平行四辺形の角が直角であることを示そうとすると方法を迷う．中点連結定理から，対角線が直角であることを利用することになるわけであるが，このことは，仮定されておらず，たこ型の性質から，この条件を導く必要がある．したがって，対角線が直交することをたこ型の性質から導くときには既に，中点を結んでできる四角形が長方形となるためには，対角線が直交することが必要であることに，気づいている必要があるのである．つまり，この問題の本質は証明を行う中で気付くことであり，証明を振り返ることで本質を見いだす証明に基づく発展的な学習指導とは差異がある．証明に基づく発展的な学習指導は，「証明の発見の機能」と比較すると，発見を証明に求めているが，発見が行われる場面が違う．証明に基づく発展的な学習指導は，証明することで根拠を見いだし，それを振り返ることで，発見を行っており，証明の発見の機能は，証明を構成する過程で新たな命題や知識を発見しようとしていることが分かる．証明に基づく発展的な学習指導の証明により根拠を求めることは，De Villiers(1999)の指摘する「証明の説明の機能」と同じ考えである．このときの証明は「証明のための証明」ではなく，何が根拠となっているかが明らかとなる「説明のための証明」であることが求められる(Hanna,G, 1990).

(1)-2 「What-If-Not 方略」との比較

Brown ら(1990)は問題設定の方略の概要を次のようにまとめている(p.78).

第 0 水準　出発点を選ぶ

第 I 水準　属性の目録づくり

第 II 水準　What-If-Not

第 III 水準　問いをつくる あるいは問題設定

第 IV 水準　問題分析

それぞれの水準とその概略を実際に扱われている，ピタゴラスの定理を例にして述べる．

第 0 水準は出発点を選ぶことである．出発点は様々で，ピタゴラスの定理や，幾何板，数列，握手に関することなども取り上げられている．ピタゴラスの定理を例にすると，ピタゴラスの定理を例にすると決めた時点で，この第 0 水準に到達しているといえる．

第 I 水準は属性の目録づくりである．属性というのは，出発点が持つ性質や要素などのことである．ピタゴラスの定理においては，「この陳述は定理である.」，「定理は 3 つの辺の長さを扱っている」，「定理は直角三角形を扱っている.」，「定理は面積を扱っている.」，「ピタゴラスの定理には，変数が 3 つある.」，「変数は等号で結ばれている.」などが挙げられている．

第 II 水準は What-If-Not である．第 1 水準で挙げた属性に対して，What－If-Not と問う段階である．「この陳述は定理である.」に対して，What-If-Not と問い「この陳述が定理でなければどうか」と問うている．その結果，「陳述を定義と解釈せよ.」，「陳述を公理と解釈せよ.」，「陳述は偽であると過程せよ．すなわち$a^2+b^2 \neq c^2$」を得ている．

第 III 水準は問をつくる，あるいは問題設定である．第 II 水準で変形させた多くの属性をもとに問をつくる段階である．「変数は等号で結ばれている」から得た「変数は<で結ばれている」に対し，「$a^2+b^2<c^2$には幾何学的意味があるか」や「どんな全数に対して，この不等式は成り立つか」という問を挙げている．

第 IV 段階は問題分析である．ここでは，第 III 段階でつくった問を分析する．

以上が Brown ら(1990)の What-If-Not 方略の概要である．これを基に，証明に基づく発展的な学習指導と比較していく．まず，共通点から明らかにしていく．それは，新たな性質を発見できることと，その目的が，問題の本質的な理解であることである．さらに，問題の作り方は，問題の属性について，明らかにすることから，始めており，この点は証明に基づく発展的な学習指導における，証明を行い，根拠を明らかにしている点と同じであると考える．

次に相違点について述べる．まずは，問題を作る場面では，What-If-Not 方略は，明らかにした属性について，What-If-Not(もしそうでなければ，どうか)と問うているが，証明に基づく発展的な学習指導では，証明によって明らかにした根拠や条件について考えている．さらに，そうでなければどうか，と問うのではなく，結論を変えないように，根拠や条件を変えることはできないかと問うている．つまり，「A ならば命題は成立する．A は B を根拠としている．A となるような，他の C はないか」というように，命題の証明の形や根拠を変えないで済むような，他のものはないかと考えていることが分かる．

以上2つの比較を通して，証明に基づく発展的な学習指導の特徴は，ある命題Aを成り立たせている命題Bがあるとき，命題Aを成立させるような，命題Cはないか，と考えていくことであるといえる．What-If-Not方略のように述べると，属性を証明で明らかになった根拠や仮定に限定し，Aを成立させるという方向付けを持った上で，B以外にはないか，と考えていくことであり，方向付けを持ったWhat-If-Notと言える．

3 教材開発の実際

原題の設定を行うにあたって，これまでの考察から，原題の備えるべき条件を以下のように定めた．

- 証明が，説明のための証明となること．
- 問題解決の過程で，煩雑にならないこと．
- 学習する内容という観点から見ても，価値のある教材であること．
- 発展が多様に考え得ること．

以上の条件に従い，二等辺三角形に関する問題，円に関する問題，フェルマー点に関する問題の3つの原題を設定し，これらの原題の今日の数学教育における位置付けを明らかにした．そして実際に開発した教材を用いた探究を行い，その過程を記述した．

ここでは，具体的に二等辺三角形に関する問題について，いくつか述べる．原題は，次の通りである.「二等辺三角形ABCのAB, ACの中点をDEとする．CE，BDを結び，交点をFとすると，△FBCが二等辺三角形であることを証明せよ．」(図3)

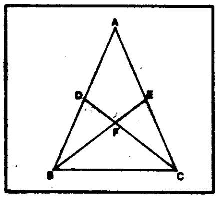

図3 原題1

この証明は以下のようになる．

△DBCと△ECBにおいて，

BC=BC(共通)

AB=AC，D，Eが中点であることから

DB=EC

∠DBC=∠ECB(二等辺三角形の底角)

ゆえに，二辺夾角がそれぞれ等しいため

△DBC≡△ECB

合同な図形の対応する角は等しいから，

∠DCB=∠EBC

ゆえに2つの角が等しいため，

FB=FCの二等辺三角形である．

このとき，△DBCと△ECBの合同は，BC=BCが共通，DB=ECが仮定の中点とAB=AC，∠DBC=∠ECBが二等辺三角形の底角で，それぞれ保証されており，用いている合同条件は，二辺夾角である．

さて，証明の根拠に用いたものの中から属性を選ぶ．D，Eが中点であることを選ぶ．D，Eが中点であることは，DB=ECの根拠となっている．ならば，DB=ECであるが，D，Eが中点でない場合はどうか．中点を二等分する点として考えれば，三等分，四等分と考えることもできる．また，D，Eの位置は中点でなくとも，DB=ECを満たすような位置であれば証明は大きく変わらない．したがって中点ではなく，単にDB=ECという仮定で置き換えることができる(図4)．

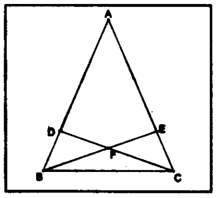

図4 DB=EC

次に属性として，二辺夾角について考える．二辺夾角は合同の根拠となっている．では，合同となるが二辺夾角でない場合はどうか．すると，他の合同条件，三辺相等，二角夾辺，直角三角

形の合同条件なら，斜辺と他の一辺，斜辺と他の鋭角が考え得る．例えば，直角三角形の合同条件である，斜辺と他の鋭角を考えてみると，B，C から AC，AB に垂線を降ろした場合も△FBC は二等辺三角形となる．同様に二角夾辺の場合も考えてみると，∠DCB=∠EBC となるような直線をひけばよい．しかし，このように直線をひくと，三角形の合同を示す前に，△FBC の 2 つの角が等しくなるため，二等辺三角形であることが示せてしまう．つまり，∠DCB=∠EBC となるような直線をひければ，△FBC は二等辺三角形となることが分かる．さらに，2 つの角が等しい三角形は二等辺三角形であることを属性に選ぶ．これは，二等辺三角形であることの根拠となっている．では二等辺三角形であるが，角の等しくないときはどうか．二等辺三角形であれば，必ず 2 つの角は等しくなるが，そのことを根拠に使わずに二等辺三角形であることを示すには，2 つの辺 BF，CF が等しいことが考えられる．BF=CF となるように F を作るためには，B，C から，BC の半分より大きい半径を用いて円をかき，その交点を F とする必要がある．この作図は，線分の垂直二等分線の作図と同じである．この垂直二等分線は A を通り，二等辺三角形 ABC の対称軸となる．

このように，垂直二等分線の存在に気付くと，二等辺三角形が線対称な図形であること，これまでに作ってきた F が常に垂直に等分線上に乗っていること，D，E の作り方が線対称であったことなどが分かる．また，BF=CF となるような F は BC の下にも作図することができる(図 5)．BC の下側にできる点を F とすると，ABF'C がたこ型であることに気付くことができ，先ほどまでの F についても，凹たこ型と捉えることができる．

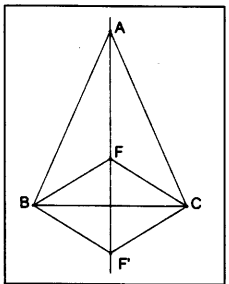

図 5　F と F'

これらの探究から，二等辺三角形という形が，線対称であり，F が常にもとの三角形の対称軸上につくられるという本質的な理解を得ることができる．

4　開発した教材とそれを用いた探究の評価

第 3 章で設定した教材と，その教材を用いた探究の過程の評価を行うために，まず，第 2 章で証明に基づく発展的な学習指導の意義として挙げた，新たな性質の発見，性質の関連，本質的な理解の 3 つの観点が達成されていることを述べた．今回の二等辺三角形の事例でも，新たな命題の発見を行うことができ，二等辺三角形やたこ型が線対称な図形であるという本質的な理解，そして，二等辺三角形とたこ型の性質の関連について促すことができる．他の第 3 章で開発した教材とその探究は，教育的に十分意義があり，また，第 2 章で行った，証明に基づく発展的な学習指導の特徴付けが適切であったと評価した．

終章　研究のまとめと今後の課題

本研究では，証明指導の課題を指摘し，その課題を克服するために、証明に基づく発展的な学習指導が効果を挙げることを指摘した．その上で，証明に基づく発展的な学習指導の特徴付けを行った．これらのことから教材の備えるべき条件を設定し，教材を開発した．それらを実際に探究する過程で，どのように探究が展開されうるかを示し，証明に基づく

発展的な学習指導の特徴付けの正当性と，教材の価値を述べることを行った．

本研究における課題は第一に，本研究において開発した教材を，実際に授業で扱うことを通して，その有効性や改善点を明らかにすることである．

第二に，証明に基づく発展的な学習指導の特徴付けについてである．今回は3つの事例を基に，証明の発見の機能と，What-If-Not方略との比較を通して，特徴付けを行ったが，さらなる考察，精緻化が必要である．また，探究の際の特徴だけでなく，実際の授業場面まで，落として考察する必要もある．

教材を開発するために，証明に基づく発展的な学習指導を考察したが，他にも様々な教材開発の方法が存在する．それらとの関連を調べ，それぞれを特徴付けし，最終的には，教材開発の理論を構築するのが，第三の課題である．

【主要引用・参考文献】

杉山吉茂(1986)．公理的方法に基づく算数・数学教育の学習指導．東洋館出版社

国宗進(1987)，「『論証の意義』の理解に関する発達の研究」．日本数学教育学会誌数学教育学論究．47・48．

清宮俊雄(1988)．モノグラフ幾何学―発見的研究法―改訂版．科学振興新社

ブラウン,S.I.，ワルター,M.I.著．平林一栄監訳(1990)．いかにして問題をつくるか－問題設定の技術－．東洋館出版社

国宗進(1994)，「中学校数学科での論証の指導―その意義と問題点―」．日本科学教育学会第18回年会論文集．82(3)．pp.2-11

宮崎樹夫(2001)，「中学校数学領域における論証に関する研究―局所的な準体系に基づいて演繹の基になる命題の正しさを探る活動の諸相―」，数学教育論文発表会論文集，34，pp.349-354

宮崎樹夫(2002)，「中学校数学において，生徒が証明の発見機能を活用するための諸条件に関する研究」．科学教育研究 26(5)．pp.358-369

中川裕之(2006)「類比に基づく発展的な数学の学習指導について」早稲田大学 学位論文

国宗進(2007)「論証についての理解に関する総合的研究―図形の論証と文字式による論証の観点から―」．数学教育論文発表会論文集．40．pp.619-624

柴田翔(2009)．体系のよさに焦点をあてた図形教材の開発．日本数学教育論文発表会論文集，42，pp.529-534．

柴田翔(2010)．証明を利用した図形教材に関する研究．日本数学教育論文発表会論文集，43，pp.717-722．

Hanna,G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. Interchange, Vol.21/1,

de Villiers,M.(1999). Rethinking proof with sketchpad. Key curriculum press

de Villiers, M.(1990). The role and function of proof in mathematics , Pythagoras, No.24, 17-24.

Hanna, G. & de Villiers, M. (2008)Proof and proving in mathematics education, ZDM Mathematics Education, Vol.40, 329-336.

（しばた しょう
東京都板橋区立西台中学校
〒175－0082 板橋区高島平1－4－1）