Title	再帰の考えの面白さを感得させる教材の開発 : 高等学校（数学I）平方根の連分数展開(fulltext)
Author(s)	須藤,雄生
Citation	学芸大数学教育研究(25): 39-47
Issue Date	2013-06-01
URL	http://hdl.handle.net/2309/138930
Publisher	東京学芸大学数学科教育学研究室
Rights	

再帰の考えの面白さを感得させる教材の開発
――高等学校（数学Ⅰ）平方根の連分数展開――

須藤　雄生

要　約

「同一構造の繰り返しを見抜き，それを利用して問題解決を図っていこうとする考え」である再帰の考えは，離散数学の分野に限らず，問題解決のさまざまな場面で有用である。本研究では，平方根の連分数展開に関する教材を開発し，それにより，再帰の考えを活用することで，再帰の考えに独特な，学習者にとっての予期せぬ発見がみられる場面が設定できるとともに，複数の解法を再帰の考えという観点から関連づけ，既習の数学の内容をより豊かにできることを示した。

1.　研究の目的と方法

筆者は以前より，再帰の考えに着目した教材の開発を行っている。ここでいう再帰の考えとは，『問題場面にひそむ「同一構造の繰り返し」（すなわち再帰構造）を見抜き，それを利用して問題解決を図っていこうとする考え』（須藤，2004）のことを指す。

再帰の考えはもともと，離散数学の分野で話題にされることが多い。離散数学は計算機科学と切り離せない関係にあり，またその原点である「アルゴリズムをいかに組み立てて問題を解決するか」を考えるとき，再帰の考えを活用する場面が自ずと現れるからである。しかし筆者は，再帰の考えを離散数学に特有のものであるとは考えていない。再帰の考えのもつ，「同一構造の繰り返しを見抜く」という発想を生徒に身に着けさせることは，離散数学の教育的価値を高めることにとどまらず，他のさまざまな場面での活用へも波及が期待できると考えている。したがって，離散数学の教育的価値としてしばしば論じられる，現実場面との関連性の深さ（例えば長崎，2007）についても，本研究ではそれにとらわれずに教材開発を行う立場を取る。

本研究の目的は，再帰の考えを活用する教材によって，学習者が既習の数学の内容をより豊かにしたり，予期せぬ発見をしたりといった面白さを感得させることが可能であると示すことである。そのために，再帰の考えを活用する面白さが現れるような教材を開発し，その価値について論じる。

2.　開発教材「平方根の連分数展開」

2.1.　場面の設定

本研究では，高等学校「数学Ⅰ」の「数と式」分野において，教材を開発した。きっかけは，次のような分母の有理化である。

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1 \quad \cdots ①$$

このような分母の有理化は，生徒にはとっつきにくいもののようである。というのも，左辺と右辺が同じ値を示すことが，理解されにくいのであろう。実際に$\sqrt{2}$の概数を代入すれば，左辺と右辺の値がおよそ等しいことは分かる。しかし，それでもいまひとつ生徒のなかですっきりしないのは，左辺と右辺の式の形がまったく異なるにも関わらず，どちらにも$\sqrt{2}$という同

じ平方根が含まれるところではないだろうか。左辺は分数，右辺は分数でないのに，それらが等号で結ばれる。もちろんこれは，中学校段階における，次のような分母の有理化でも，同じことがいえる。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

異なる形の左辺と右辺の式のなかに，$\sqrt{2}$という同じものが含まれる。そこで，これを「同一構造」と見なし，再帰の考えを持ち込む。そして，平方根に特有の現象として，なぜ左辺と右辺に同じ平方根が現れるのかを考える。このような流れで，本研究において開発したのが「平方根の連分数展開」に関する教材である。

2.2.　平方根の連分数展開

まず，前節であげた式①の左辺と右辺をとりかえると，次のようになる。

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

ここで，左辺の$\sqrt{2}-1$が，右辺にも含まれていると考える。すなわち，次のような変形で「同一構造」に着目しやすくする。

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}\quad\cdots②$$

この右辺の分母に，②自身を入れ子のように代入する。これが再帰アルゴリズムとなる。

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{2+\left(\dfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}\right)}$$

結果的にこの操作は，無限に繰り返すことができてしまい，結果得られるのが次のような式である。

$$\sqrt{2}-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

以下，これを高木貞治（1971）「初等整数論講義第2版」にならって，

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}\,\frac{1}{+\,2}\,\frac{1}{+\,2}\,\frac{1}{+\,2}+\cdots$$

と表記することにする。

他の平方根，例えば$\sqrt{3}$でも同じことができる。すなわち，

$$\sqrt{3}-1=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2}{2+(\sqrt{3}-1)}$$

であるから，得られる連分数展開は，

$$\sqrt{3}=1+\frac{2}{2}\,\frac{2}{+\,2}\,\frac{2}{+\,2}\,\frac{2}{+\,2}+\cdots$$

さて，これらの元になった$\sqrt{2}-1$，$\sqrt{3}-1$の式であるが，これは，もとの左辺である$\sqrt{3}-1$と，右辺の分母にある$\sqrt{3}+1$とが，どちらも同じ小数部分$\sqrt{3}-1$を持っている，とみることもできる。このように，整数部分，小数部分に着目すると，例えば，整数部分が2である平方根$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$について，

$$\sqrt{5}-2=\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\frac{1}{4+(\sqrt{5}-2)}$$

$$\sqrt{6}-2=\frac{2}{\sqrt{6}+2}=\frac{2}{4+(\sqrt{6}-2)}$$

$$\sqrt{7}-2=\frac{3}{\sqrt{7}+2}=\frac{3}{4+(\sqrt{7}-2)}$$

であるから，次を得る。

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}\,\frac{1}{+\,4}\,\frac{1}{+\,4}\,\frac{1}{+\,4}+\cdots$$

$$\sqrt{6}=2+\frac{2}{4}\,\frac{2}{+\,4}\,\frac{2}{+\,4}\,\frac{2}{+\,4}+\cdots$$

$$\sqrt{7}=2+\frac{3}{4}\,\frac{3}{+\,4}\,\frac{3}{+\,4}\,\frac{3}{+\,4}+\cdots$$

平方根を小数で表すとき，数字のならびに規則性を見いだすことはできないが，このような方法で連分数による表記を考えると，数字のな

らびに規則があらわれる。その美しさと面白さを味わわせたいところである。あるいは，文字式の処理が得意な生徒なら，一般化に至ることもできるかもしれない。すなわち，$\sqrt{a}$ の整数部分を n とすると，

$$\sqrt{a}-n=\frac{a-n^2}{\sqrt{a}+n}=\frac{a-n^2}{2n+(\sqrt{a}-n)}$$

であるから，得られる連分数展開は

$$\sqrt{a}=n+\frac{a-n^2}{2n+}\,\frac{a-n^2}{2n+}\,\frac{a-n^2}{2n+}\cdots$$

である。

2.3. 連分数の約分

平方根の連分数展開について，生徒に試行錯誤させてみると，次のような疑問があがることがある。例えば，

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\cdots$$

$$\sqrt{6}=2+\frac{2}{4+}\,\frac{2}{4+}\,\frac{2}{4+}\,\frac{2}{4+}\cdots$$

であり，一見，約分すると整数以外の部分が等しくなるようにも見えるが，実際には $\sqrt{2}$ と $\sqrt{6}$ の小数部分は，もちろん等しくはない。これはなぜか，というものである。この疑問を解決するためには，連分数の約分について理解する必要がある。これは，再帰アルゴリズムによって得られた式を，再び評価する活動にもつながるものである。

$\sqrt{6}$ の連分数展開を例にとる。いまいちど，もとの分数の表記に戻してみると，次のようになる。

$$\sqrt{6}=2+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{4+\cdots}}}}$$

ここで，$\dfrac{2}{4+\dfrac{2}{A}}=\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{A}}$ であることに注意して，$\dfrac{2}{4+\dfrac{2}{A}}$ の形をしている箇所がどこにあるかをさがせばよい。これも「同一構造を見抜く」一つの例になっている。

以上から，次のような約分が可能と分かる。

$$\begin{aligned}\sqrt{6}&=2+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{\boxed{4+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{4+\cdots}}}\,A}}\\&=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{\boxed{4+\cdots}\,A}}}}\\&=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}\end{aligned}$$

すなわち，

$$\sqrt{6}=2+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{4+}\cdots$$

これで，$\sqrt{2}$ と $\sqrt{6}$ の小数部分が等しくないことも理解できた。なお，連分数による表記が一意ではないことが，この例から分かる。

2.4. 連分数からもとの平方根を求めること

前節で，同一構造になっている部分を A とおいて単純化することを試みたが，これは連分数で表された数を，閉じた表現，すなわちもとの平方根に直すことにもつながっている。例えば，

$$\frac{1}{3+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{6+}\cdots$$

なる連分数で表された数が，どのような数であるかを求めよう。この式の値を x とおくと，「同一構造の繰り返し」に注意すれば，

$$x=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+x}}$$

が成り立っていることが分かる。分母を払って整理すれば，

$$x=\frac{6+x}{3(6+x)+1}$$

$$3x(6+x)+x=6+x$$
$$3x^2+18x=6$$
$$3(x+3)^2=33$$
$$x+3=\pm\sqrt{11}$$

xは正の数であるから，

$$x=\sqrt{11}-3$$

したがって，xは$\sqrt{11}$の小数部分である。

この考え方は，循環小数で表された有理数を，閉じた表現（分数）に直す考え方と，まったく同じものといえる。すなわち，例えば$0.\dot{3}\dot{6}$（0.363636…）という循環小数を分数で表したいならば，0.363636…$=x$とおくことで，

$$100x=36.3636\cdots=36+x$$

とし，$x=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}$とするわけである。言うまでもなく，これも同一構造の繰り返しを見抜く，すなわち再帰の考えにもとづいている。連分数と循環小数を関連づけることで，生徒は，再帰の考えをどのように活用していくかの具体的なイメージを持ちやすくなると考えられる。

2.5.　平方根の値の近似

これまでの節で，平方根を連分数で表すことと，有理数を循環小数で表すことには，たがいに似た関係があることが分かった。ここで，連分数で表された数のおおよその値を考えてみたい。例えば，

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\cdots$$

は，有限回で連分数展開をやめると，

$$2+\frac{1}{4}=2.5$$

$$2+\frac{1}{4+}\frac{1}{4}=2+\frac{1}{4.25}\fallingdotseq 2.2353$$

のように，だんだん$\sqrt{5}$の真の値へと近づいていく。どのくらいの精度で近づいていくかを考えたいならば，これを漸化式で表現してみるとよい。これも，2.3節で取り上げた見方と同じである。

例えば$\sqrt{5}$の連分数展開において，展開をn回で止めたときの小数部分をa_nとし，それらを見比べてみる。

$$n=3\qquad a_3=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}}$$

$$n=4\qquad a_4=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}}}$$

同一構造を見抜き，このように定式化する。

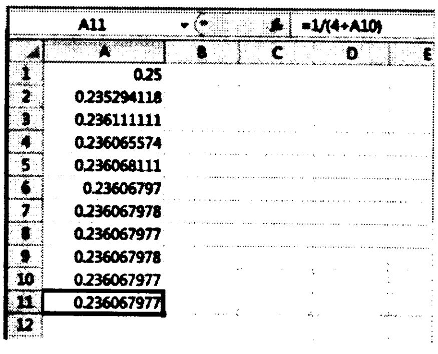
$$a_4=\frac{1}{4+a_3}$$

一般のnについて考えることで，

$$a_1=\frac{1}{4},\quad a_{n+1}=\frac{1}{4+a_n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

で表される数列$\{a_n\}$が得られる。すなわち，$\sqrt{5}$の小数部分は，この数列$\{a_n\}$において$n\to\infty$としたときの極限ということになる。

表計算ソフトで計算させることで，$\sqrt{5}$の小数部分がどのように収束していくかを見ることができる。



A11　=1/(4+A10)

	A	B	C	D	E
1	0.25				
2	0.235294118				
3	0.236111111				
4	0.236065574				
5	0.236068111				
6	0.23606797				
7	0.236067978				
8	0.236067977				
9	0.236067978				
10	0.236067977				
11	0.236067977				
12					

図1　表計算ソフトによる計算例

計算結果を見ると，この数列の収束は非常にはやく，a_4 ですでに，小数第5位まで $\sqrt{5}$ の小数部分が近似されていることが分かる。

2.6. 平方根の正則連分数展開

連分数において，分子がすべて 1 である形のものを正則連分数という。すなわち，

$$\sqrt{6}=2+\frac{2}{4}\,{}_{+}\frac{2}{4}\,{}_{+}\frac{2}{4}\,{}_{+}\frac{2}{4}\,{}_{+}\cdots$$

は正則連分数ではないが，

$$\sqrt{6}=2+\frac{1}{2}\,{}_{+}\frac{1}{4}\,{}_{+}\frac{1}{2}\,{}_{+}\frac{1}{4}\,{}_{+}\cdots$$

は正則連分数である。

上記の例では，約分をすれば正則連分数を得られるわけであるが，一方で，

$$\sqrt{7}=2+\frac{3}{4}\,{}_{+}\frac{3}{4}\,{}_{+}\frac{3}{4}\,{}_{+}\frac{3}{4}\,{}_{+}\cdots$$

は一見，約分しても正則連分数にできそうにない。しかし，もとの連分数展開のアルゴリズムに手を加えることで，正則連分数に展開することが可能である。実際，先にあげた「初等整数論講義 第 2 版」(高木，1971) では，正則連分数のみを連分数として扱っている。ここではその方法について考えてみたい。

引き続き，$\sqrt{7}$ を例にとる。元の式は，

$$\sqrt{7}-2=\frac{3}{\sqrt{7}+2}\quad\cdots\ (*)$$

である。いま，正則連分数に展開したいので，右辺の分母分子を 3 で割ると，

$$\sqrt{7}-2=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{7}+2}{3}}$$

新たな分母 $\dfrac{\sqrt{7}+2}{3}$ は，$2<\sqrt{7}<3$ より整数部分が 1，小数部分は $\dfrac{\sqrt{7}+2}{3}-1$，すなわち $\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}$ である。

$$\sqrt{7}-2=\frac{1}{1+\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}}$$

ここで，はじめの式 (*) のように，分母へ $\sqrt{7}$ をうつすことを考える。

$\sqrt{7}-1=\dfrac{6}{\sqrt{7}+1}$ であることを用いると，

$$\sqrt{7}-2=\frac{1}{1+\dfrac{2}{\sqrt{7}+1}}$$

分子を 1 にしたいので，2 で割る。

$$\sqrt{7}-2=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}}}$$

新たな分母 $\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}$ に対して，同様の操作を行う。$\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}$ の整数部分は 1，小数部分は $\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}-1$，すなわち $\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$ である。

$$\sqrt{7}-2=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}}}$$

$\sqrt{7}-1=\dfrac{6}{\sqrt{7}+1}$ を再び用いて分母に $\sqrt{7}$ をうつし，分子を 1 にするために 3 で割る。

$$\sqrt{7}-2=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{\sqrt{7}+1}}}$$
$$=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{7}+1}{3}}}}$$

$\dfrac{\sqrt{7}+1}{3}$ の整数部分は 1，小数部分は

$\dfrac{\sqrt{7}+1}{3}-1$，すなわち $\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}$ であるから，

$$\sqrt{7}-2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{7}+1}{3}}}}$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{7}-2}{3}}}}$$

$\sqrt{7}-2=\dfrac{3}{\sqrt{7}+2}$ を用いると，

$$\sqrt{7}-2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{7}+2}}}}$$

ここで，分子が初めから 1 になる状況が出現する。すなわち，あとは $\sqrt{7}+2$ を整数部分と小数部分に分けるだけでよい。

$$\sqrt{7}-2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+(\sqrt{7}-2)}}}}$$

これで，分子がすべて 1 の状態で，$\sqrt{7}-2$ に自分自身を代入できる状況になる。

以上より，$\sqrt{7}$ の正則連分数展開として，

$$\sqrt{7}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\cdots$$

を得る。

2.7.　正則連分数展開と有理数

前節で述べた再帰の過程は，正則連分数を得る方法としてよく知られたものである。すなわち，まず分子を 1 にし，分母を整数部分と小数部分に分け，分母の小数部分に対して同じ操作を繰り返すという方法である。このような再帰構造は，ユークリッドの互除法と同じ構造ととらえることができる。例えば，126 と 49 の最大公約数をユークリッドの互除法で求めるとき，126 を 49 で割って 2 余り 28 とし，49 と 28 の最大公約数に帰着させる。これを，有理数 $\dfrac{126}{49}$ を整数部分 2 と小数部分 $\dfrac{28}{49}$ に分けているのと同じ，と考えるのである。

そのまま続け，有理数 $\dfrac{126}{49}$ に対して正則連分数展開を行ってみると，次のようになる。

$$\frac{126}{49}=2+\frac{28}{49}$$

$$=2+\cfrac{1}{\cfrac{49}{28}}$$

新しい分母 $\dfrac{49}{28}$ の整数部分は 1，小数部分は $\dfrac{21}{28}$ であるから，

$$\frac{126}{49}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{21}{28}}$$

分母分子を 21 で割って，

$$\frac{126}{49}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{28}{21}}}$$

新しい分母 $\dfrac{28}{21}$ の整数部分は 1，小数部分は $\dfrac{7}{21}$ であるから，

$$\frac{126}{49}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{7}{21}}}$$

分母分子を 7 で割って，

$$\frac{126}{49}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}$$

これで，正則連分数に展開された。最後の分子が 1 になる直前に分母分子を 7 で割っており，この 7 が最大公約数になっている。

正の有理数に対して正則連分数展開を行うと，必ず分母が前の操作での分母より小さくなっていくため，いつかは必ず最小の自然数である 1 になり，アルゴリズムは停止する。しかし，正の平方根を正則連分数展開すると，$\sqrt{7}$ の例でみたように，分母につねに$\sqrt{7}$ 自身が残っていくため，(ちょうど有理数を循環小数で表すときと同じように) アルゴリズムは停止せず，正則連分数展開の過程は無限に循環する。

このことは，例えば$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明に，興味深いかかわりを持つと考えられる。よく知られている背理法による証明は，「$\sqrt{2}$ を分数で表すと無限に約分できてしまうから，矛盾である」という論理である。これは，有理数ならば有限回で終わるアルゴリズムが，無理数だと無限に繰り返せてしまうことに他ならない。もともとの問いであった「分母の有理化で，両辺に同じ平方根が現れるのはなぜか」とはすなわち，無理数である平方根に特有の，この性質が式に現れたものとみることができるのである。

3. 開発した教材の特徴づけ

本教材では,「分母の有理化」という場面から，平方根の連分数展開に発展させた。まず，有理化の際に両辺に同じ平方根が含まれるという，生徒にとって素朴だが“なんとなく不思議な現象”から出発し，その式を無限に代入し続けるという形で連分数展開を導入した (2.1 節，2.2 節)。もっとも，この時点では式の妥当性などは評価しておらず，表記上の「遊び」にすぎない (これについては後述する)。しかし，遊びのなかから，いままでに見たことのない風景が急に見えることが，再帰の考えの面白さでもある。

再帰アルゴリズムは，その性質上，人間の手によって「制御する」ことができない。同一構造が現れたら，それだけで「勝手に」回ってしまうのが，再帰アルゴリズムである。だからこそ，そこから見える新たな発見は，学習者の予期しないものになる。本教材でいえば，平方根の小数部分に着目することで，思いがけない規則性が現れた部分が，それにあたる。

次に，連分数を約分したり，連分数からもとの平方根を求めたり，といった活動につなげた (2.3 節，2.4 節)。これは，再帰の考えのもとになった「同一構造の繰り返しを見抜く」ことの活用例になっている。連分数展開を行うことが「書き」ならば，この活動は「よみ」にあたる。また，そのなかで，有理数における循環小数表記と，平方根における連分数表記に関連があることをおさえた。

一方，テクノロジーによる平方根の近似値計算なども取り入れた (2.5 節)。再帰の考えは，言うまでもなく，テクノロジーとの親和性が高い。人間は漸化式というプログラムをテクノロジーに与えるだけで，テクノロジーが人間に数値という形で結果を返してくる。その結果を再び人間が解釈することで，今回の場合は，連分数を用いると，平方根の近似値を比較的簡単に，思いのほかよい精度で求めることができることが分かったわけである。

最後にあげた正則連分数展開 (2.6 節，2.7 節) の話題は，いささか込み入ったものであると思われるが，連分数展開についてよく知られた方法である。ここでは，ユークリッドの互除法との関連づけが鍵になる。本教材では，平方根の連分数展開という側から出発して,「有理数で同じことをしたらどうなるか」という考えから，ユークリッドの互除法へとつなげていく形をとったが，反対に，まず有理数をユークリッドの

互除法で連分数展開し，それを無理数である平方根に応用するとどうなるか，という流れで教材化することも考えられる。ここでは，ユークリッドの互除法と，平方根の連分数展開という，2 つの再帰アルゴリズムに関連がつくという面白さだけでなく，「有理数はアルゴリズムが有限で停止し，無理数である平方根はアルゴリズムが無限に繰り返される」という，無理数の性質へと本質的につながっている点に注目したい。これは,「アルゴリズムの構成」と「命題の証明」との関連性を示す例にもなっており，これは高校数学のなかで，生徒にぜひ味わわせたいことのひとつである。

4. 研究の総括と今後の課題

本研究においては，平方根の連分数展開という教材を開発するとともに，その開発過程を振り返り，次のような示唆を得た。

- 再帰の考えを持ち込むことで,平方根のある種の連分数表記に規則性があることや,平方根の近似値の収束のはやさなど,学習者にとって意外な発見を促せること。
- ユークリッドの互除法と連分数展開という 2 つの再帰の考えに関連性を見いだすことで,有理数と無理数の数としての性質が明確になるとともに,それらが有機的に関連づいて，既習の数学を豊かにできること。

本教材については，いまだ本格的な授業実践に至ったわけではないので，授業実践とその評価については今後の課題としたい。

一方，数学的にもより精緻にしていきたい部分がある。先述のとおり，本教材では，連分数展開を導入する上で，式の妥当性などには言及していない。しかし，本来は，注意を要する部分もある。以前，連分数展開について生徒に紹介したとき，授業後に次のような連分数展開をつくり，疑問に感じたという生徒がいた。

$$\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\cfrac{2}{\sqrt{2}}}=\frac{2}{\cfrac{2}{\cfrac{2}{\sqrt{2}}}}=\cdots?$$

この「連分数展開」(?) では,

$$\sqrt{2}=\cfrac{2}{\cfrac{2}{\cfrac{2}{\cfrac{2}{\cdots}}}}$$

すなわち，$\sqrt{2}=\frac{2}{0}\,{}_{+}\,\frac{2}{0}\,{}_{+}\,\frac{2}{0}\,{}_{+}\,\frac{2}{0}\,{}_{+}\cdots$

という主張になるが，実際は右辺の値は$\sqrt{2}$とは限らないのではないか，というのが生徒の疑問である。これは的を射ていて，そもそも,

$$a=\cfrac{2}{\cfrac{2}{a}}$$

は，0 でない任意の実数aについて成り立つ。したがって,

$$\cfrac{2}{\cfrac{2}{\cfrac{2}{\cfrac{2}{\cdots}}}}$$

は，特定の値には収束しないと考えられる。これは，2.5 節のように漸化式を用いて部分列を定義したとき，極限値をもたない数列を構成してしまった例であるともいえる。

では，いかなる場合に「許される」連分数展開になり，いかなる場合には「許されない」連分数展開となるのか。無限連分数で表された数

$$a_0+\frac{b_1}{a_1}\,{}_{+}\,\frac{b_2}{a_2}\,{}_{+}\,\frac{b_3}{a_3}\,{}_{+}\,\frac{b_4}{a_4}\,{}_{+}\cdots\frac{b_n}{a_n}\,{}_{+}\cdots=\alpha$$

に対して，これをn番目で打ち切ったものを

$$a_0+\frac{b_1}{a_1}\,{}_{+}\,\frac{b_2}{a_2}\,{}_{+}\,\frac{b_3}{a_3}\,{}_{+}\,\frac{b_4}{a_4}\,{}_{+}\cdots\frac{b_n}{a_n}=\alpha_n$$

とおいたとき，

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$$

が成り立っているかどうかを調べればよいことになる。

一般に，a_k，b_k $(k=1,2,3,\cdots)$ それぞれが $0<b_k\leqq a_k$ を満たすならば，その連分数はαに収束することが知られている。したがって，本教材の 2.2 節や 2.6 節であげた連分数は，その展開アルゴリズムの性質から，すべて各a_k，b_kが $0<b_k\leqq a_k$ を満たすようになっており，問題なく収束する。しかし，連分数展開に用いる式によっては，この条件からはずれる連分数が得られることもある。例えば，

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\sqrt{2}=\frac{2}{1+(\sqrt{2}-1)}$$

という 2 本の式を用いて，

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$
$$=\frac{1}{1+\dfrac{2}{1+(\sqrt{2}-1)}}$$

という式を導くと，連分数として

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{1}{}_{+}\frac{2}{1}{}_{+}\frac{1}{1}{}_{+}\frac{2}{1}{}_{+}\cdots$$

が得られるが，これが「許される連分数展開」なのかどうか。これについては，さらなる検証が必要である。

今後も教材研究と実践を続け，より洗練されたものにしていきたい。

引用・参考文献

木村俊一（2012）『連分数のふしぎ・無理数の発見から超越数まで』講談社ブルーバックス

長崎栄三ほか（2007）『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究 最終報告書』国立教育政策研究所

須藤雄生（2004）『再帰の考えに着目した離散数学教材の開発』東京学芸大学大学院教育学研究科修士論文

高木貞治（1971）『初等整数論講義　第 2 版』共立出版

（すどう　ゆう
筑波大学附属駒場中・高等学校
東京都世田谷区池尻 4-7-1）