学芸大数学教育研究　第25号　2013　69－74

回転移動の合成についての一考察

吉川行雄

要　約

本稿の目的は，平面図形において，2 つの回転移動の合成を 1 つの回転移動で表すときの回転の中心と回転量について考察することである。一般に，点 A を中心とする α の回転移動と点 B を中心とする β の回転移動の合成は，ある点 O を中心とする $\alpha+\beta$ の回転になる。ここで，点 O は点 A を中心に AB を $-\alpha/2$ 回転した直線と点 B を中心に BA を $\beta/2$ 回転した直線の交点として決まる。なお，移動前後の直線が平行になるのは，$\alpha+\beta=180^\circ\times k$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$) となるときであり，k が奇数のときは 180° 回転，k が偶数のときは平行移動になる。これらの事柄は，中学校や高等学校における図形の移動の見方に関連する教材研究としてぜひ視野に入れておきたい内容である。

1　はじめに

本稿の目的は，平面図形において，2 つの回転移動の合成を 1 つの回転移動で表すときの回転の中心と回転量について考察することである。特に回転移動の合成が平行移動になる場合の特徴をていねいに調べる。

この問題は，“GEOMETRY REVISITED” (Coxeter&Greitzer.1967) の 3.3 ‘Napoleon triangles’ の証明に関連して，Yaglom(1962)の別証明が紹介されていたことに端を発したものである。次に引用するように，Yaglom による証明では，回転移動の合成を用いている。

22.(a) Construct equilateral triangles on the sides of an arbitrary triangle ABC, exterior to it. Prove that the centers O_1,O_2,O_3 of these triangles themselves form the vertices of an equilateral triangle. (Figure31)

Does the assertion of this exercise remain correct if the equilateral triangles are not constructed exterior to triangle ABC, but on the same side of its sides as the triangle itself?　(Yaglom,1962,p.38)

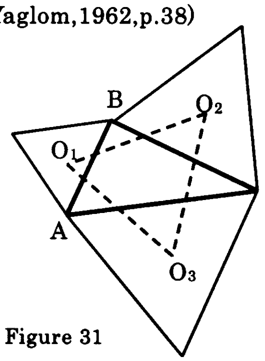


Figure 31

22.(a) Consider the sequence of three rotations, each through 120° , about the point O_1,O_2,O_3(see Figure 31 in the text). The first of these rotations carries A into B, the second carries B into C, and the third carries C into A.

Thus the point A is a fixed point of the sum of these three rotations. But the sum of three rotations through 120° is, in general, a translation, and therefore has no fixed points. From the fact that A is a fixed point we see that the sum of these three rotations must be the identity transformation (translation through zero distance). The sum of the first two rotations is a rotation through 240° about the point O of intersection of two lines, one through O_1 and the other through O_2, each making an angle of 60° with O_1O_2. Therefore the triangle O_1O_2O is equilateral. Since the sum of this rotation and the rotation about O_3 through 120° is the identity transformation, the point O must coincide with O_3. Thus the triangle $O_1O_2O_3$ is equilateral, which was to be proved.

In the same way one can show that the center O_1',O_2',O_3' of the equilateral triangles constructed on the sides of the given triangle ABC, but lying towards the interior of ABC, also form an equilateral triangle(Figure 80). (Yaglm,1962,p.93)

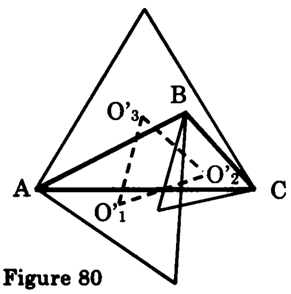


Figure 80

上記のようなナポレオン三角形の別証明について考えるために，回転移動の合成について学ぶことがセミナー（注１）での課題となった。

図形の移動の見方は図形学習の様々な場面で用いられるが，中心の異なる２つの回転移動の合成を１つの回転移動とみる見方についてはほとんど取り上げられることがなかった。この意味で，新たな教材研究のきっかけを与えてくれる問題となった。

なお，ナポレオン三角形の証明についての見直しは次稿にゆずり，本稿では，回転移動の合成に焦点をあてて考察する。

２　回転移動の合成

２つの回転移動

㋐　点Ａを中心にαの回転

㋑　点Ｂを中心にβの回転

を引き続いて行った場合，直線lがどのような動きをするのかを考察する。ここで，α，βなどの角は回転の向きと回転量を考えた回転角である。

図１のように，点Ａを中心とするαの回転によって直線lがl'に移ったとすると，lとl'のなす角もαである。

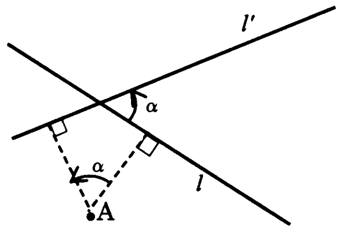


図１　点Ａを中心とするαの回転

このことが確認できれば，図２のように，２つの回転㋐と㋑を引き続いて行って，直線lがl''に移れば，lとl''のなす角が$\alpha+\beta$になることも自明である。

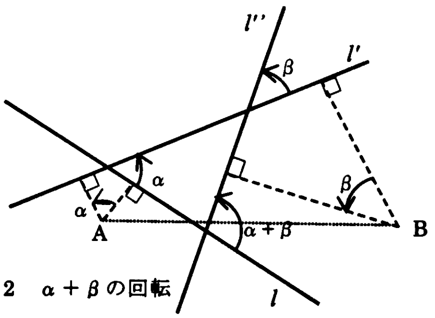
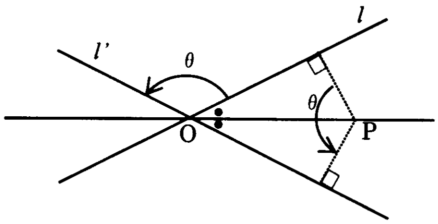


図２　$\alpha+\beta$の回転

直線lとl''のなす角が$\alpha+\beta$ならば，ある点を中心とした$\alpha+\beta$の回転１つでlをl''に移せることが予想される。もちろん，特定のl, l''だけでなく任意の直線についても㋐，㋑を引き続いて行ったのと同じ移動になるような回転である。

補足 1)「任意の２つの回転移動を引き続いて行ったときの対応関係が１つの回転移動の対応関係に等しい」ということは，回転移動の集合が“引き続いて”という操作で演算を導入すれば「閉じている」ことを意味する。これは，回転移動の集合が群を形成していくための基礎的条件となる。

補足 2)一般に，２直線 l, l'が θ の角で交わっているとき，θ の回転で l を l'に移すような回転移動の中心は１つではない。下の図のように，交角の補角側の角の二等分線上ならどの点でもよい。



しかし，ここでは，任意の直線の対応関係を対象とするので，その条件を満たす回転の中心は特定の点にしぼられてくる。求めた点Ｏは，㋐，㋑に依存して決まるのであって，l には依存しないわけである。

この回転の中心がどこにあるのかを特定できれば，この場面の全体構造がはっきりしてくるはずである。そこで，この中心の特定のしかたを考える。

上記条件を満たす回転が存在するなら，その中心は２つの回転㋐，㋑を引き続いて行った結果の不動点となるはずである。そこで，まず，このような不動点が存在するとして，これをＯとする。図３にように，回転㋐でＯはO'に移り，回転㋑でO'はO"に移るとすると，O"がはじめのＯと一致する，という構造になる。この場面で円運動の対称性を考え，対称軸として直線 AB に着目すると，図３のような関係になり，図４のような方法でＯの位置を特定できる。

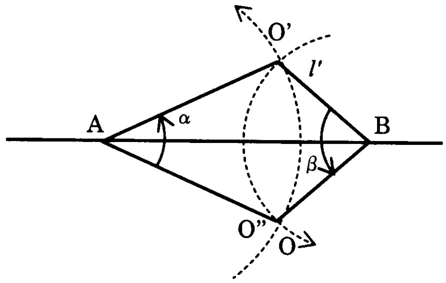


図３　$\alpha+\beta$ の回転移動における不動点Ｏ

図４で，点Ｏは

ⓐ 点Ａを中心に直線 AB を $-\alpha/2$ 回転した直線

ⓑ 点Ｂを中心に直線 BA を $\beta/2$ 回転した直線

の両方にのっているはずだから，２直線ⓐ，ⓑの交点が求める不動点Ｏである。

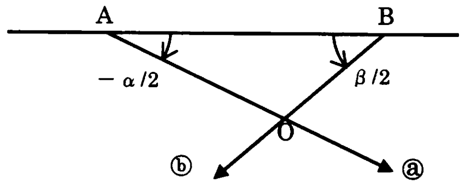


図４　$\alpha+\beta$ の回転移動の中心Ｏの求め方

２つの回転移動㋐，㋑を合成した移動が１つの回転移動になる場合の中心Ｏを特定する方法ついて，別の見方で説明してみよう。図５は，回転移動㋐によって，線分 AB が A'B'に移動し，引き続いて回転移動㋑によって線分 A'B'が A"B"に移動したところを表したものである。

図５で，AB=AB'（A'B'）＝A"B"=A"B，

∠BAB'=∠α，∠B'BB"＝∠ABA"＝∠β

また，△ABB'≡△A"BB"

２つの回転移動㋐，㋑を合成した回転移動によって，線分 AB が A"B"に移るとすれば，その回転移動の中心Ｏは，線分 AA"の

垂直二等分線と線分 BB"の垂直二等分線の交点である。

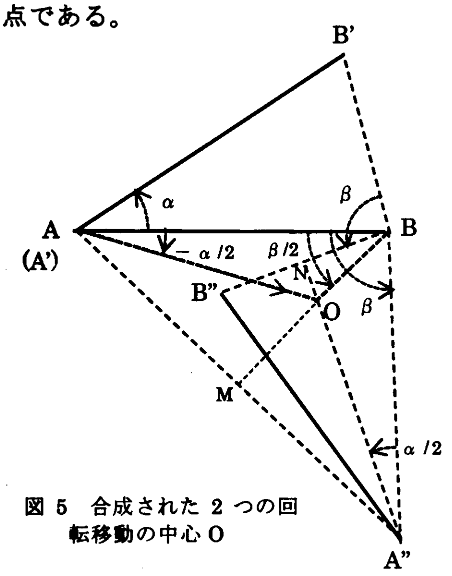


図 5　合成された 2 つの回転移動の中心 O

線分 AA"の垂直二等分線は，BA=BA"より，∠ABA"の二等分線でもある(BM)。また，線分 BB"の垂直二等分線は A"B=A"B" より∠B"A"B の二等分線でもある(A"N)。直線 BM と A"N の交点として回転の中心 O が決まる。ここで，二等辺三角形 BAA"の対称性から，∠BAO=∠BA"O=$\alpha/2$ であるから，A"O の代わりに AO を用いることができる。すなわち，点 O は，点 A を中心に直線 AB を$-\alpha/2$回転した直線と，点 B を中心に直線 BA を$\beta/2$回転した直線の交点である。

3　回転移動の合成による平行移動

ところで，図 6，図 7 のような場合には，2 直線ⓐ，ⓑが交点をもたないので，O を特定することができない。

図 6 では，㋐の回転をした直線の向きを㋑の回転でもとの向きにもどす関係になっており，㋐と㋑の合成で直線 l と l''の向きが変わらないので 2 直線は平行である。

図 7 では，㋐と㋑の合成でちょうど 1 まわり（360° 回転）したことになり，やはり 2 直線の向きが同じで l と l''は平行である。

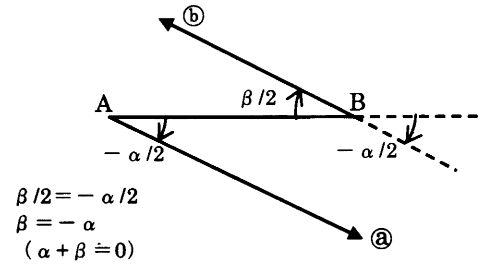


図 6　図 4 で点 O が決まらない場合①

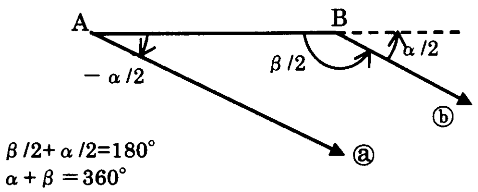


図 7　図 4 で点 O が決まらない場合②

図 6，図 7 とも，$\alpha+\beta$ の回転によって直線 l は平行で向きも等しい直線 l''に移る。これは移動としては平行移動である。平行移動を無限遠点を中心とする回転移動と考えることもあるが，もちろん具体的に中心を特定することはできない。

ここで，直線 l と l''が平行になる場合について，もう少し検討してみたい。

直線 l の回転量（$\alpha+\beta$）からみれば，移動前後の直線が平行になるのは

$\alpha+\beta=180° \times k$ (k=0, ±1, ±2, ･･･)

となるときである。いま調べた図 6 の場合は k=0，図 7 の場合は k=2 である。k の値が 0, 2 以外の場合についても調べてみよう。

わかりやすくするために，図 8 のように，直線 l 上に 2 点 P，Q をとり，線分 PQ に注目しながら考えを進めることにする。

k=1 の場合，すなわち $\alpha+\beta=180°$ の場合，有向線分 PQ の向きが入れかわるので，

対応する点P，P"およびQ，Q"を結んだ線分は平行四辺形 QPQ"P"の対角線で互いにその中点で交わる。この交点が合成された回転の中心で，ⓐ，ⓑの交点として求めた点と一致する。

kが1変わるごとに線分PQの向きは180°ずつ入れかわる。kが奇数のときは不動点があり，この点を中心とする180°の回転になる。

kが偶数のときは平行移動であり，強いて回転とみるには中心として無限遠点の考えを導入しなければならない。

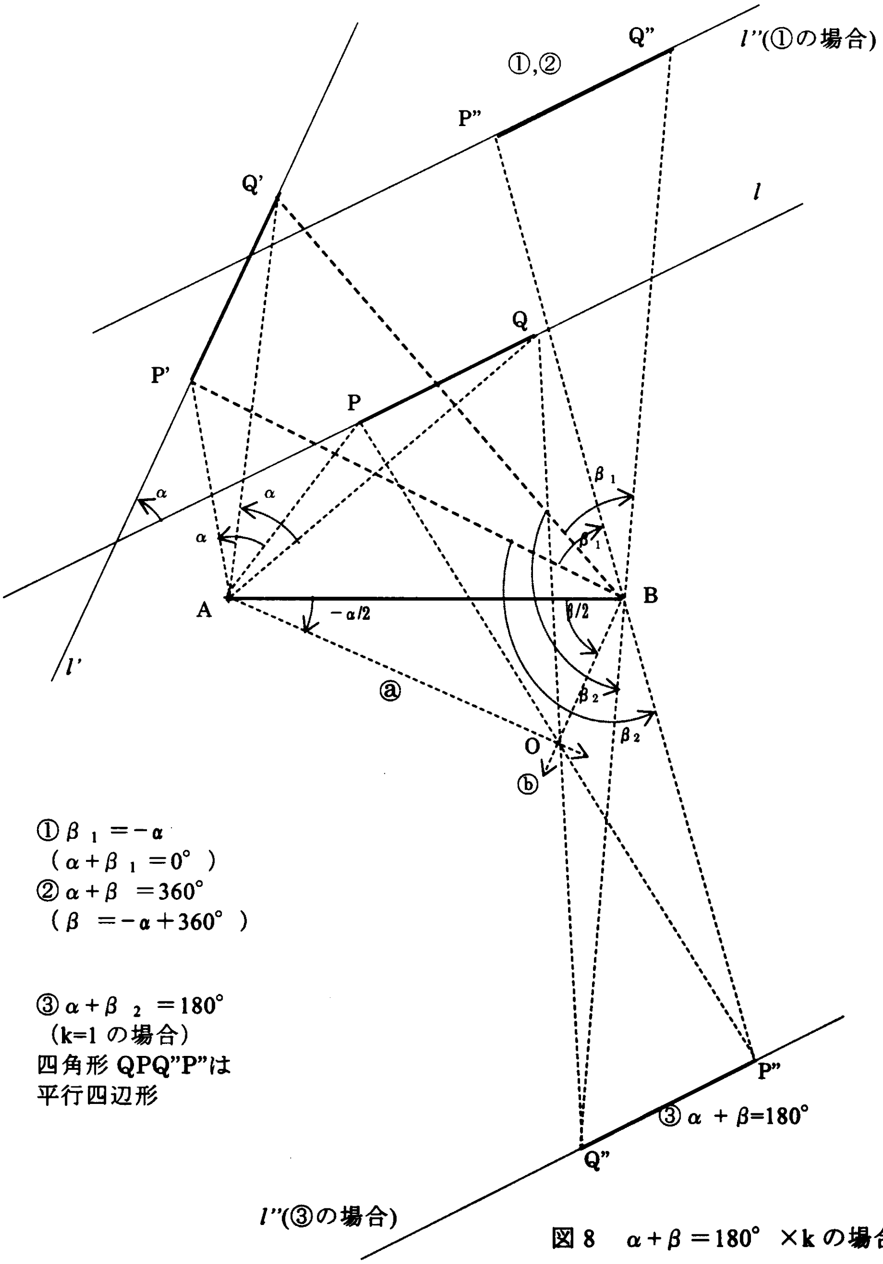


図8　α+β＝180°×kの場合

4　まとめ

点Aを中心とするαの回転移動と点Bを中心とするβの回転移動の合成が，点Oを中心とする$\alpha+\beta$の回転になるとき，点Oの求め方と任意の点Pの移動の様子を，図9に示す。

㋐　点Aを中心とするαの回転

㋑　点Bを中心とするβの回転

点Oは点Aを中心にABを$-\alpha/2$回転した直線と点Bを中心にBAを$\beta/2$回転した直線の交点である。

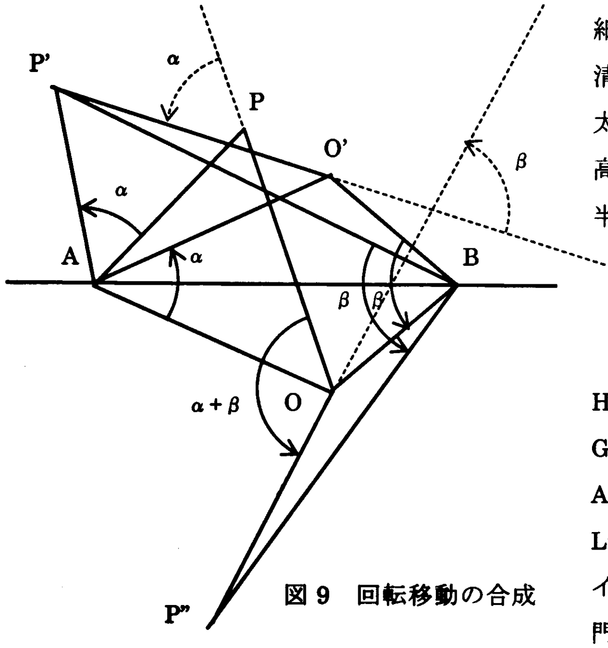


図9　回転移動の合成

図9について，次の移動に着目する。

△PAO→㋐点Aを中心とするαの回転→△P'AO'

△O'BP'→㋑点Bを中心とするβの回転→△OBP"

$\angle POP" = \alpha + \beta$

また，任意の点Pを点Oと関係づけ線分OPの動きに着目する

OP　→㋐→　O'P'　→㋑→　OP"

P→P'　㋐点Aを中心とするαの回転

P'→P"　㋑点Bを中心とするβの回転

→→PはOを中心とする$\alpha+\beta$の回転でP"に移る。

注

1) 本稿は,『幾何学再入門』(H.コークスター，S.グレイツァー著，寺坂英孝訳(1970)
"GEOMETRY REVISITED"
(Coxeter&Greitzer.1967)，をテキストとして行われているセミナーで，2012年6月～12月にかけての議論の記録の一部を整理したものである。この時期の議論に参加したのは次のメンバーである。

川村栄之（東京学芸大学附属小金井中学校）
佐藤亮太（東京学芸大学附属高等学校）
細矢和博（東京大学附属中等教育学校）
清水宏幸（山梨県教育委員会）
太田伸也（東京学芸大学）
髙橋　均（東京大学附属中等教育学校）
半田　進（元弘前大学，東北福祉大学）

引用・参考文献

H.S.M.Coxeter,　S.L.Greitzer,(1967), GEOMETRY REVISITED, The Mathematical Association of America, New Mathematical Library, pp.60-65　(H.コークスター，S.グレイツァー著，寺坂英孝訳(1970),『幾何学再入門』)

I.M.Yaglom(1962),Geometric,Transformations, New Mathematical Library, vol.8, 1962, Random House, New York and the L. W. Singer Co., Syracuse.p.38,p.93

(よしかわ　ゆきお
元山梨大学教育学部)