修士論文要約

変数としての文字の理解の様相についての研究
―文字式の大小比較問題を通して―

鳴海　文彦

本研究の目的は，変数としての文字の理解の様相を明らかにすることである。この目的に対して，Kuchemann(1981)の述べる変数の操作的定義としての第二次関係の特徴を整理するとともに，「第二次関係」「第一次関係」など文字の理解を示す4つのカテゴリーを設定した。そして中学校1年生を対象に調査問題を設定しデータの収集を行った。解答の分析を行うことを通してそこに見られる特徴を整理した結果「境界値の存在を想定している解決」「式を介在させている解決」などの新たな第二次関係のとらえ方を見出すことができた。

<論文の構成>

序．研究の目的と方法

我が国の中学校数学において，子どもの文字式の学習における困難性の要因として，算術から代数へと移行し本格的に使用されることになる文字の解釈が挙げられる。

Kuchemann(1981) は Concepts in Secondary Mathematics and Science（以下 CSMS とする）プロジェクトで行った大規模調査の結果を分析し，子どもの文字の解釈を6種類に分類した。その中で数量を表す文字として「特定の未知数」「一般化された数」「変数」の3つが存在する。この3種類の文字の解釈の中でも特に「変数」を理解することは「未知数」「一般化された数」の理解が含まれるため最も困難であるとされている。文字を「変数」として解釈することの困難性は Booth(1984,1987)も指摘している。

我が国における実態調査でも子どもの文字の解釈として「特定の未知数」「一般化された数」「変数」については共通するものであることが見出されている。(杜威 1991)

このように変数として文字を理解することの困難性は国内外で指摘されている。しかし，いまだに子どもがどのように変数として文字を理解しているのかということが十分に探られてきたとはいえない。そこで本研究では変数としての文字の理解の様相を明らかにすることを目的とする

1. 文字の理解の実態に関する研究

学校数学において文字は□，△などの記号に代わるものとして導入される。そして未知数，定数（一般化された数），変数としての役割を持つものとして扱われる。変数と定数はともに1つの表現で複数の値をとり得るという点が共通している。しかし定数は，特定の文脈において決まった数値を表すのに対して，変数は数値が変化することに焦点が当てられている。この点において変数と定数は区別されていると言える。

次に国内外の文字に関する先行研究を整理した。海外では Kuchemann(1981)が生徒の文字のとらえ方に焦点を当てて分析を行い「数値化された文字」「使われなかった文字」「物としての文字」「特定の未知数」「一般化された数」「変数」の6種類に分類した。また変数の理解をとらえる枠組みとして第二次関係に焦点を当てている。国内の研究では国宗ら(1996)が量的な分析を行い，変数の理解の困難性を主張している。また，藤井(1989)は具体的な生徒の記述に焦点を当てて分析を行うことにより，変数の理解の一端をとらえている。これらのことから第二次関係という観点をもとに，具体的な生徒の記述について質的な分析を行う方針を定めた。

2. 変数の理解をとらえる枠組みについての検討

(1)変数の操作的定義としての第二次関係

Kuchemann(1981)は「文字の間に第二次関係（または高次関係）が確立されているとき，文字は変数として使われている。」(p.111)と変数の操作的定義を与えている。この第二次関係というのは関係それら自身の関係のことを表している。

CSMSプロジェクトは次のような問題を調査問題として設定している。

問題：2n と n+2 ではどちらが大きいですか？ 説明してください。

Kuchemann(1981)はこの問題を解決する際，n＝4 と n=7 を代入した場合を例にして説明している。(2n，n+2) に対して，それぞれ (8，6)，(14，9) を得る。それぞれの数対について，2n＞n＋2 が見出される。これが第一次関係であるのに対して，第二次関係を確立させることもまた可能であるとして具体的に例を挙げている。

「n が増加すると, 2n と n+2 の差が増加する」というのが1つ目の第二次関係の例である。ここでは(2n，n+2)の数対の差という関係に着目されている。差が変化していることをとらえることができた生徒は，n の値の変化にともなう 2n と n+2 のそれぞれの値の変化のしかたが異なるということを理解していることが示唆される。

もう1つは「2n の増加量は n＋2 の増加量よりも大きい」というものである。こちらは，特定の n の範囲におけるそれぞれの増加量を求めている。それぞれの変化量がここでいう第一次関係に相当する。それらを比較し 2n のほうが同範囲における増加量が大きいことが分かる。n の値の変化にともなう，それぞれの増加の仕方は異なるということを示している。

変数の理解に対応する調査問題は1問だけであるが，第二次関係を述べる際に用いられている問題がもう一問ある。

問題：1本5ペンスの青い鉛筆と1本6ペンスの赤い鉛筆があります。青い鉛筆と赤い鉛筆をそれぞれ何本か買ったら合計90ペンスになりました。青い鉛筆の本数をb，赤い鉛筆の本数をrとするとbとrについてどのようなことがいえるでしょうか。

この問題については，文字を特定の未知数または一般化された数としてとらえることができていれば，$5b+6r=90$という数量関係を表す式をつくることは可能である。しかし，bとrの間にある関係をより深くとらえるためには，第二次関係を構成することが必要である。

一方でbの増加，rの増加がそれぞれ独立してとらえている状態が第一次関係が確立されている段階であると考えられる。

「bの増加量はrの減少量よりも大きい」などのように，bとrはそれぞれ変化するのであるが，$5b+6r=90$という状態を保つように，それぞれの文字の値が変化が関連することに意識が向いているのが第二次関係をとらえた状態である。

(2)第二次関係の特徴

提示した両問に共通して言える事は，第二次関係が確立されることによって一方の文字の値の変化に連動して，別の文字や文字式が変化するという感覚が表れている。つまり子どもが感覚として持っているとらえにくく表出しがたいものが第二次関係という形で具体的に表面化され得るのである。

そのため第二次関係は変数概念をとらえているかを調べるための1つの視点として機能していると言える。

第一次関係をとらえているということは，1つの表現で複数の値をとり得るということ、すなわち一般化された数としての文字の理解より進展しているものである。「数量関係を表す式を作成する問題」ではbとrのそれぞれの変化についての認識，「2nとn+2の大小比較問題」ではnの値に対応して2nとn+2の大小関係が決定するという認識があるということを意味しているものと受け取れる。

つまりは，これらのことから変化するnの値に何らかの制御することができている状態が第一次関係をとらえられている状態である。これは，文字が1つの表現で様々な数値を表しているという，一般化された数としての文字の理解よりも進展しているが，第二次関係を構成できていないため，文字の理解としては一般化された数と変数の過渡期にあたると考えられる。

3. 変数の理解に焦点を当てた調査の実施とその分析

(1)調査の目的と方法

調査の目的は，変数としての文字の理解の様相を明らかにすることである。本調査は2012年3月14日，国立附属中等教育学校の第1学年4クラスを対象として行った。総数106名。各クラスの人数は以下に示す通りである。

1組：27名　　2組：25名

3組：27名　　4組：27名

実施時間30分間で記述式の調査を行った。用いた調査問題の一例を以下に示す。

> Aさんのクラスで，次のような問題が出題されました。
>
> 2aとa+2ではどちらが大きいですか？
>
> あなたなら，この問題についてどのように答えますか。あなたの考えをできるだけ詳しく書いてください。

(1年3組)

調査問題において比較する2つの文字式は2nとn+2，または3aとa−3を用いている。2nとn+2はKuchemann(1981)が調

査で用いた文字式である。3a と a－3 は，小岩(2004)が調査で用いたものである。

問題はクラスごとに変更している。1 組に対しては，用いられている文字を n として「2n と n+2 ではどちらが大きいですか？」としている。(以下 2n と n＋2 型と呼ぶ) 2 組と 4 組には 3a と a－3 の大小を比較する問題(以下 3a と a－3 型)を出題している。2 組については解答についてより詳しい説明を求めるような問い方にしている。

(2)解答の分析と子どもの変数の理解の様相

①調査結果の概略

まず調査問題に対する正答率などを明らかにするとともに，子どもが得た結論について類型を設定しそれに基づいて分類を行う。以下に示すものが結論についての類型と，その内訳である。

A：有理数の範囲で正しく場合分けを行っている。

B：整数または自然数の範囲で正しく場合分けを行っている。

B1： 文字を整数とみなしている

B2： 文字を自然数（及び 0）とみなしている

B3： 例外的に示している。

(例：n が 0，1，2 以外は 2n の方が大きい)

C：誤った場合分けを行っている。

C1：正負で場合分けをしている。

C2：その他

D：大小関係が入れ替わることがあることを認めているが，範囲を示していない。

D1：大小関係が入れ替わる境界値について言及していない。

D2：大小関係が入れ替わる境界値について言及している。

E：どちらか一方を選択している。

F：その他

以下分類表を掲載する。

	A	B1	B2	B3	C1	C2	D1	D2	E
1	3	8	5	2	1	1	3	0	3
3	3	4	12	0	1	0	6	0	1

表 1 「2n と n＋2 型」の類型別人数

	A	B1	B2	B3	C1	C2	D1	D2	E
2	0	4	0	0	6	0	3	1	11
4	2	4	0	0	7	0	6	0	8

表 2 「3a と a－3 型」の類型別人数

「2n と n＋2 型」については，A に該当するのが 54 人中 6 人で 11.1%である。また特に文字の取り得る値の範囲を示していないため，B まで含めると 54 人中 37 人(68.5%)がこの問題に対して正答を導いていることになる。これは，CSMS プロジェクトが行った大規模調査における，正答率が 6%であったことを考えると，非常に高い正答率であると言える。

常にどちらか一方が大きいと答えている子どもは 4 人であった(7.4%)。これも CSMS プロジェクトの調査では一方が大きいとしている解答が，2n が 71%，n＋2 が 16%であり，本調査の結果とは大きく異なっている。

また本調査では，a と n について異なる文字で問題を設定したことは，n は自然数または整数であることを意識して，両クラスで反応が異なる可能性を考えたために 2 種類の問題を用意している。しかし，文字の相違に関わらず生徒が示した反応を見て

みると，文字を自然数（及び 0）の範囲で場合分けを行っている解決は，文字 n を用いている 1 組が 5 人（18.5%）であり，文字 a を用いている 3 組では 12 人（44.4%）であった。このことから，n が必ずしも自然数を連想させたとは言えない。

整数の範囲で場合分けを行っている解決は，1 組が 15 人（55.6%），3 組が 16 人（59.3%）となりほとんど同等の割合であった。またその他の結論の分類をみても大きな差が認められるものはない。

「3a と a－3 型」については，A，B に属するのが 10 人(19.2%)であり，有理数の範囲で境界値を発見できたのは 2 名のみであった。これは「2n と n+2 型」とは大きく異なっている。一方で「3a の方が大きい」としている解答が 19 人(35.6%)いた。これは，境界値が負の有理数であったため，文字が表している数範囲を整数のみ，または正の数のみでとらえていることが理由であると予想できる。

②変数の理解をとらえる枠組みをもとにした分析

次に具体的な生徒の解決過程に着目して分析を行う。まず，境界値を特定するために用いられている手法や，大小関係を調べる際の代入の仕方，その他の関係の調べ方などに焦点を当て，問題に対する結論を導くために行った解決をもとに分類を行う。

数全体を想定して結論を述べているというだけでは，どのように文字をとらえているのかを明らかにすることができない。少なくとも一般化された数として文字をとらえられていれば，結論として数全体を想定していることを推測できるからである。

そこで境界値や大小関係の調べ方，また実際に具体的な数値を代入することなしに，結論を述べている場合，何を根拠としてそのような判断をしているかなど，それらのことがうかがえる記述に着目した。

例えば，文字 n に様々な数値を代入し式の値を求め，それぞれの文字の値での大小関係をもとにして結論を述べている解決は多く存在するが，実際に代入した部分の数対に見られる性質や関係を発見し，それをもとに結論が正しくなることを示しているものと，代入した式の値から帰納的に判断したものでは文字の理解に相違があると考えられる。

また，数値の代入の仕方であっても，値を 1 ずつ変化させて大小関係や境界値を特定しようとしているものと，無作為に様々な数値を代入し，値によって大小関係が変化することや，値が等しくなることがあることを発見したものでは文字の理解が異なると推測できる。

そして，検討した第二次関係を枠組みとして「第二次関係」「第一次関係」「一般化された数」「一般化された数以下」のカテゴリーを設定した。

以下に示すものが，各カテゴリーの人数の内訳である。

	1	3	2	4
第二次関係	3	1	1	2
第一次関係	8	12	8	3
一般化された数	7	6	7	7
一般化された数以下	1	2	4	2
未分類	8	6	5	13

表 3　各カテゴリーの人数内訳

「第二次関係」は，文字を変数としてとらえているものが当てはまる。結論を述べる際に実際に代入を行った n の値のみでなく，数全体を想定していることや，代入していない値についても結論で述べていることが成り立つことを 2n と n+2 などの文字

式のそれぞれの変化をとらえ，それを根拠に説明されているかという点に着目した。

「第一次関係」は一般化された数と変数の過渡期の段階であるものである。文字が1つの表現でいろいろな数値を同時に表しているという認識を持っている状態から，さらに文字の値が変化しているという意識が表れている状態である。大小関係を調べる際に代入する数値を制御している解決や，また式変形を行ったうえで大小比較を行っている解決に着目した。

「一般化された数」は文字が1つの表現でいろいろな数値をとり得る，そしてそれらを同時に表しているという認識がある状態である。結論，まとめなどの記述や，大小関係が変化することを直観している記述にも焦点を当てた。

「一般化された数以下」は文字が1つの表現で複数の数を表しているという認識がない状態である。記述では結論を述べる際に数全体を想定していることが読み取れないものや，1つの数値のみを代入したことにより大小関係を判断している解決などに着目した。

(3)子どもの変数の理解の様相

①「第二次関係」の記述の特徴

ア.境界値の存在を想定している

他の数値を代入したときの大小関係をもとにして境界値のおおよその値を想定しているものである。

NS(図1)は2aとa+2にa=4，1，0を代入し式の値を比較して，それぞれのaの値における大小関係について述べている。そして「ある数字をさかいにして2a>a+2なのか2a<a+2なのか決まると思う。」と大小関係が逆転する境界があることを発見し，さらにある数字について「4>x>1であることが分かる」と述べている。

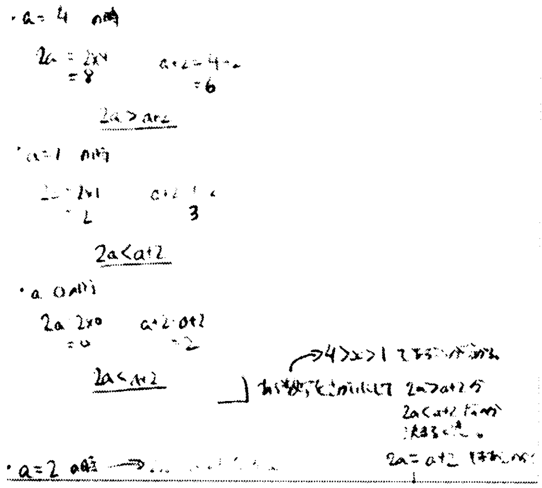

図1 NS

これはa=1とa=4を代入して大小比較を行った結果，2aとa+2の大小関係が変化していることから見当をつけたものと考えられる。

aに値が代入され，2aとa+2の数対間に大小関係が構成される。ここでは大小関係そのものが数対間の関係である。そして，その数対間の関係同士に構成された関係，すなわち第二次関係が2aとa+2の大小関係が変化しているということを認識し，その間に境界値があることを見抜いているというところに表れている。aの変化にともなう，2aとa+2の変化をとらえていることがわかる。

図2で示しているのは「3aとa−3型」の問題に対するTHの解決の一部である。

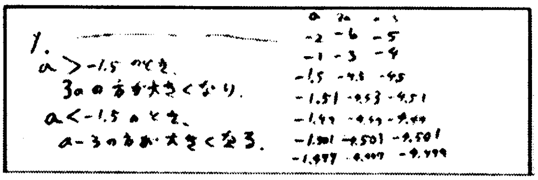

図2 TH

THも3aとa−3の大小関係が変化する境界値が−2と−1の間に存在すると見当をつけていることが示唆される。整数は，

a＝－2 と a＝－1 を代入しているのみで，それらの値における 3a と a－3 の大小関係が変化していることから，－2 と－1 の間にあることを見抜いたのであろう。

その後 a＝－1.5 を代入し両者の値が等しくなる境界値を特定すると，－1.51 や－1.49 また－1.501 と－1.499 という－1.5 から ±0.1 または ±0.01 の－1.5 に非常に近い値を代入し a＝－1.5 の前後での 3a と a－3 の大小関係を調べ，a＝－1.5 が境界値となることを確認していると考えられる。

イ.式を介在させている

UI(図 3)は 3a と a－3 の差を 2a+3 という式で表している。そして 2a＋3 の a を 1 ずつ変化させて 3 から－3 まで代入している。ここでは a の値を変化させながら，□すなわち 3a と a－3 の差の変化を調べている。その結果「□が自然数のときは，a－3 の方が小さいので a が－2 ときから大小が変わる。」と述べている。つまり差の正負をもとにして，3a と a－3 の大小比較をしている。

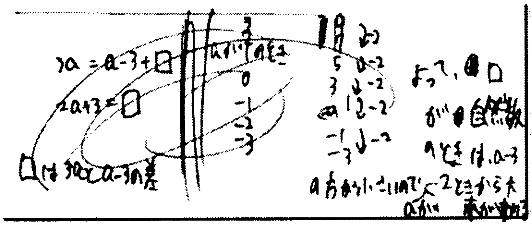

図 3　UI

つまり差の変化に焦点を当てているのであるが 3a と a－3 の差を具体的な数値ではなくて，2a＋3 という 1 つの文字式で表している。2a＋3 という表現が数対間の関係すなわち両者の差となることを UI は理解したうえで考察を行っている。

a に 3 から－3 まで代入しているが，値が 2 ずつ減少していることをとらえている。そして，2a+3 すなわち 3a－(a＋3)の値が a＝－1 のときに 1 で，a＝－2 のときに－1 となることから「a が－2 のときから大小が変わる」と述べている。差が 2 ずつ減少し続けていることから，a＝－2 以下では a－3 が大きいことをとらえている。

ウ.差の変化を利用している

NY(図 4)は文字に複数の数値を代入するだけにとどまらず，それぞれの n の値を代入したときの 2n と n+2 の差に着目し，さらに n の値により差がどのように変化するかという点に言及している。

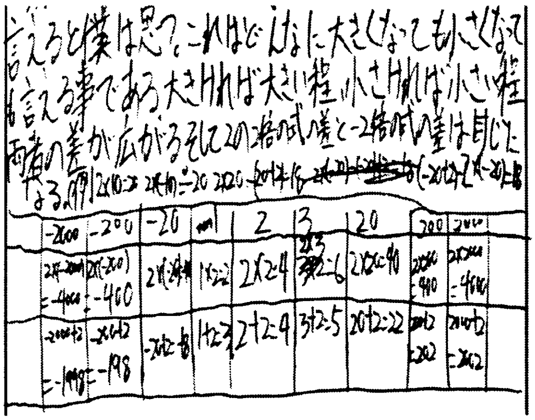

図 4　NY

表にまとめられているように，n の値を極端に大きな値，小さい値に変化させて「大きければ大きい程，小さければ小さい程両者の差が広がる」と代入していない値についても同様の大小関係が成り立つことを述べている。つまり差の変化を，値を代入していない数範囲における大小関係を判断する際の根拠として，導いた結論についての説明を行っている。

2n と n+2 に数値を代入が行われ，まずそれぞれの 2n と n+2 の差に着目されている。この差が数対間に構成される関係である。そして，その差の変化について言及される。つまり，それぞれの数対間の関係であった差同士の関係が第二次関係として表現されていることになる。

エ.文字式の変化量を関連付けている

2n と n+2 などの文字式の変化の仕方に着目して，それぞれの変化の仕方を比較している。具体的な n の値を代入したときには，その都度 2n と n+2 の大小比較を行っているが，それとは別の関係として 2n あるいは n+2 の文字の変化の仕方に関するものが構成されている。

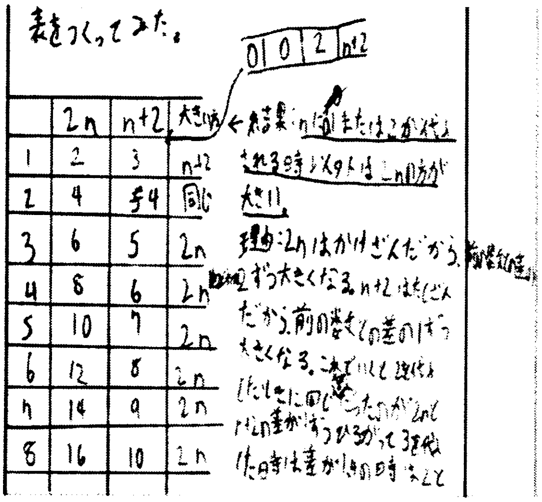

図 5　OR

OR(図 5)は 2n と n+2 に n＝0 と n=1 から n=8までの値を 1 ずつ変化させて代入して大小関係を調べまとめている。

そして，その理由として「2n はかけざんだから，前の数との差 1 を 2 でかけた <u>2 ずつ大きくなる</u>。n+2 はたしざんだから，前の数との差の <u>1 ずつ大きくなる</u>。これでいくと，2 を代入したときに同じ答えだったのが 2n と n+2 の差が 1 ずつひろがって 3 を代入した時は差が 1,4 の時は 2 となる。」（下線筆者）と述べている。

はじめに作成した表をもとにして，2n が 2 ずつ増加し，n+2 が 1 ずつ増加していることを発見している。そして，2n が 2 ずつ増え，n+2 が 1 ずつ増えていることから 2n と n+2 の差も 1 ずつ増加することを見出している。

②「第一次関係」の記述の特徴

ア.組織的に数値を代入している

文字に具体的な数値を代入している解決がほとんどである。その代入するときの数値や，順序に着目することによって，解決者の値を変化させているという意識が表面化していると考えられる事例を挙げる。

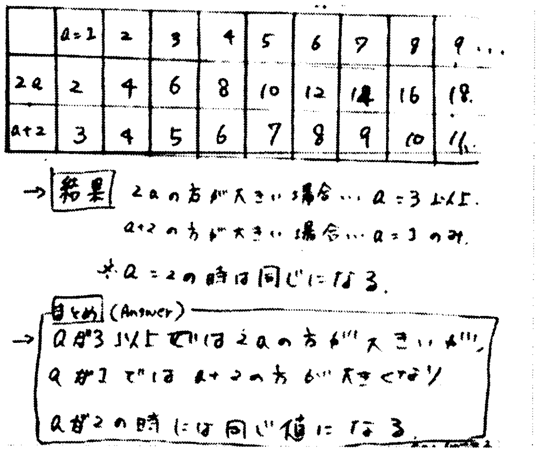

図 6　OM

OM(図 6)は a の値を a=1 から a=2，a=3 と 1 ずつ変化させ表をつくり整理している。さらに 9 のあとにも「・・・」と記し，実際に代入した値だけでなくて，それ以上の数のことも意識していることがわかる。まとめとして「a が 3 以上では 2a のほうが大きいが，a が 1 では a+2 の方が大きくなり，a が 2 の時には同じ値になる。」と述べている。OM は a がとり得る数の対象を自然数ととらえていることがうかがえるが，a＝1 から a を 1 ずつ変化させて，2a と a+2 の大小関係を調べていることや，代入していない数値も意識していることから，自然数の範囲における数全体を想定していることがわかる。

イ.式の形をそろえている

文字に数値を代入して算出された式の値である，具体的数値をもとにした大小比較を行っていない。この解決の特徴は 2n を

「n が 2 個」ととらえ，2n＝n+n と表現していることである。n+2 と n+n を式の形をそろえて比較し大小関係を考察している。

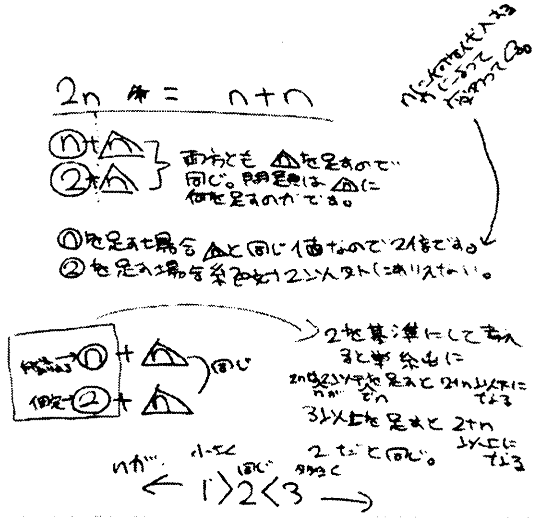

図 7　TY

TY(図 7)は 2n を n+n と表現し直し，2+n と並べて記し「両方とも n をたすので同じ。問題は，n に何を足すかです。」と述べている。これは記号からもわかるように，両辺に共通している n は同じ値だから，n と 2 の大小関係を考えればいいというように，問題をとらえなおしている。そして「2」を固定，「n」を何でもありえるととらえ，2 を基準として考えることによって結論を導き出している。

このとき数全体を想定して結論を述べていることから，n の値を変化させながら，2 と比較していることが示唆される。

③「一般化された数」の記述の特徴

ア.無作為に値を代入している

結論を述べるにあたって，数全体を想定している解答であるが，代入するときの数値や順序に，一貫性が見られないなど，値を変化させているという意識が弱いと考えられる解決を挙げる。

YT(図 8)は「a に入る数によって違います」と文字 a の値によって 2a と a+2 の値が変化し，それにともない大小関係が変化することを直観している。

その後 a に 5，8，2，1 の順で代入を行い，2a と a+2 の大小関係を調べている。代入している数値は一貫して増加また減少しているわけではないため，意図的に代入する数値を変化させているのではなく無作為に選択した数値を代入したものだと考えられる。

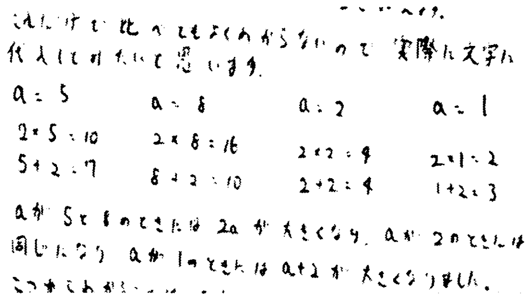

図 8　YT

代入の結果 a=2 が境界となり 2a と a+2 の大小関係が変化することを確認しており「a がもう 1 つの数（2）より大きいと乗法（2a）のほうが大きくなり（以下略）」（括弧内の補足は筆者による）と結論を述べている。この結論は実際に代入した値をもとに帰納的に導いたものと言えるが，数全体を想定しているものである。

また，YT は 3a と a+3 における大小関係について考察している。a=2 を消去し，a=3 を代入していることから，境界値が両文字式に共通している数であると，2a と a+2 のときの関係を一般化して推測を立てていることがわかる。この推測は誤りであるが，a に代入した具体的な値ではなく，数全体を想定していることが表れている。

④「一般化された数以下」の記述の特徴

ア.1 つの数値の代入で大小関係を判断している

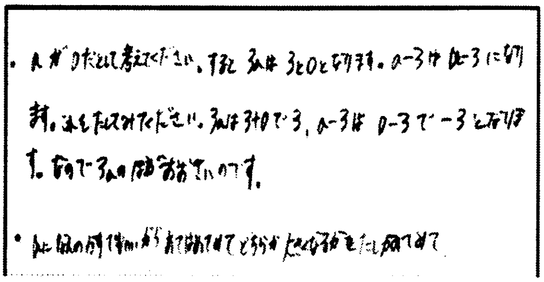

図9　WA

WAはaに0を代入しその式の値をもとに3aとa−3の大小比較を行っている。0を代入したのみで，3aの方が大きいと結論付けてしまっている。これはaの値によって大小関係が変化するということを理解していないことを表している。

文字が数を表していることは理解しているが，複数の値をaという1つの表現で表していることを理解していないと考えられる。つまり文字は未知の数であるが，変化するものではなく特定した値を表しているという認識にあると言える。

(4)指導への示唆

指導への示唆として，含まれる各文字を変数として理解していなければ解の意味を理解することが困難である連立方程式の指導場面が挙げられる。解が1つに定まるということを数値の代入のみでなく，数対間の関係などに着目してとらえることができることを考えた。

4. まとめと今後の課題

「第二次関係」に見られる特徴として帰納的に結論を導いているところから進展し，性質や関係に着目している解決が見られた。Kuchemannの説明では具体的に挙げられている差の変化や増加量に焦点を当てた解決の他にも，境界値の存在を見抜き効率的に代入を行っている第二次関係や，具体的数値でなく式をもとに関係を見出している第二次関係から，変数の理解の様相をとらえることができた。

今後の課題は本研究で用いた分析の枠組みでは明らかにすることができなかった解決について文字の理解をさらに追及すること，また調査問題の改善点を踏まえ新たな問題を設定し調査を実施することである。

引用・参考文献

Kuchemann,D.(1981). “Algebra” ,in Hart.K.M（Ed.), Children’s Understanding of Mathematics ; 11-16 pp.104-112 John Murry

Booth, L(1988) Children’s difficulties in beginning algebra. In A.F.Coxford & A.P.Shulte(Eds.), The idea of algebra, K-12:1988 Yearbook.Reston, VA:National Council of Teacher of Mathematics.

Booth,L(1984) “Algebra:Children’s strategies and Errors” , A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project

国宗進他（1996)「文字式についての理解の水準に関する研究」，日本数学教育学会誌　数学教育学論究78　臨時増刊，vol.65・66

小岩大(2004)「文字式における二面性の理解に関する研究」東京学芸大学修士論文（未刊行）

杜威（1991)『学校数学における文字式の学習に関する研究』東洋館出版社

藤井斉亮(1989)「認知的コンフリクトによる理解の分析と評価ー方程式・不等式を具体的題材にしてー」，日本数学教育学会誌　数学教育学論究72　臨時増刊，vol.53

（なるみ　ふみひこ
東京学芸大学附属国際中等教育学校
〒178-0063　東京都練馬区東大泉5-22-1)