パスカルの三角形のある拡張について

髙橋広明

要　約

パスカルの三角形は，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，漸化式 $A(n,r) = A(n-1,r-1) + A(n-1,r)$　$(0 < r < n)$ において，$A(n,0) = A(n,n) = 1$ という初期条件の下に構成される。本稿ではこの初期条件を一般化することにより，パスカルの三角形の拡張を考える。その方法として，二項係数の総和に関する性質を用いる方法と，母関数を用いる方法の2通りの方法での解決を示す。

1. はじめに

図 はよく知られたパスカルの三角形である。これを図 のように記号化する。するとパスカルの三角形は，$n = 1, 2, 3, \cdots$ について $0 < r < n$ なる r に対して，$A(n,0) = A(n,n) = 1$ という初期条件の下，漸化式

$$A(n,r) = A(n-1,r-1) + A(n-1,r)$$

によって構成される。すなわち，この初期条件下では $A(n,r) = {}_n\mathrm{C}_r$ となる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

図 1: パスカルの三角形

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & A(1,0) & & A(1,1) & & & \\
 & & A(2,0) & & A(2,1) & & A(2,2) & & \\
 & A(3,0) & & A(3,1) & & A(3,2) & & A(3,3) & \\
A(4,0) & & A(4,1) & & A(4,2) & & A(4,3) & & A(4,4)
\end{array}$$

図 2: 記号化

では，初期条件を一般化し，$A(n,0) = a_n$，$A(n,n) = b_n$ の下でこの漸化式を解くとどうなるであろうか。本稿では，初期条件を一般化するという観点でパスカルの三角形の拡張を考察する。

2. 二項係数の総和を用いる方法

以下，二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ に関するいくつかの性質を証明する。なお，今後二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を $\binom{n}{r}$ で表すこととする。

性質 I

$$\sum_{j=0}^{r}\binom{n+j}{j} = \sum_{j=0}^{r}\binom{n+j}{n} = \binom{n+r+1}{r}$$

(証明) r に関する数学的帰納法で示す。

$r = 1$ のとき，

$$\sum_{j=0}^{1}\binom{n+j}{j} = \binom{n+1}{1} + \binom{n}{0} = n+2 = \binom{n+2}{1}$$

であるから成立する。

次に r までの成立を仮定する。このとき，

$$\sum_{j=0}^{r+1}\binom{n+j}{j} = \sum_{j=0}^{r}\binom{n+j}{j} + \binom{n+r+1}{r+1} = \binom{n+r+1}{r} + \binom{n+r+1}{r+1}$$

であるが，最右辺は二項係数の性質から

$$\binom{n+r+1}{r} + \binom{n+r+1}{r+1} = \binom{n+r+2}{r+1}$$

となる。すなわち，

$$\sum_{j=0}^{r+1}\binom{n+j}{j} = \binom{n+r+2}{r+1}$$

である。以上で示せた。　(証終)

性質 II

$$\sum_{j=k+r}^{n-1}\binom{j-k}{r}=\binom{n-k}{r+1}$$

(証明)

$$\sum_{j=k+r}^{n-1}\binom{j-k}{r}=\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+$$

$$\cdots+\binom{r+(n-r-k-1)}{r}=\sum_{j=0}^{n-r-k-1}\binom{r+j}{r}$$

であるが，性質 I より，

$$\sum_{j=0}^{n-r-k-1}\binom{r+j}{r}=\binom{n-k}{n-k-r-1}=\binom{n-k}{r+1}$$

(証終)

性質 III

$$\sum_{j=0}^{r}j\binom{n+j}{n}=(n+1)\binom{n+r+1}{r-1}$$

(証明) r に関する数学的帰納法で示す。
$r=1$ のとき，

$$\sum_{j=0}^{1}j\binom{n+j}{n}=1\binom{n+1}{n}=n+1$$

$$=(n+1)\binom{n+2}{0}$$

であるから成立する。
次に r までの成立を仮定する。このとき，

$$\sum_{j=0}^{r+1}j\binom{n+j}{n}$$

$$=(r+1)\binom{n+r+1}{n}+\sum_{j=0}^{r}j\binom{n+j}{n}$$

$$=(r+1)\binom{n+r+1}{n}+(n+1)\binom{n+r+1}{r-1}$$

$$=\frac{(n+r+1)!(r+1)}{n!(r+1)!}+\frac{(n+r+1)!(n+1)}{(n+2)!(r-1)!}$$

$$=\frac{(n+r+1)!(r+1)(n+1)(n+r+2)}{(n+2)!(r+1)!}$$

$$=(n+1)\frac{(n+r+2)!}{(n+2)!r!}$$

$$=(n+1)\binom{n+r+2}{r}$$

以上で示せた。　(証終)

上限が $p-1$ の形で下限は 1 ずつ増えるようにいくつか $\sum$ を連結したものが今後大きな役割を果たす。それに関するいくつかの性質を示す。

性質 IV

$$\sum_{j_r=k+r-1}^{n-1}\ \sum_{j_{r-1}=k+r-2}^{j_r-1}\cdots\sum_{j_3=k+2}^{j_4-1}\ \sum_{j_2=k+1}^{j_3-1}\ \sum_{j_1=k}^{j_2-1}$$

$$=\binom{n-k}{r}$$

(証明) $\sum$ の個数，すなわち r についての帰納法で示す。

$r=1$ のとき，$\displaystyle\sum_{j=k}^{n-1}=\binom{n-k}{1}$ は明らかである。

次に，r までの成立を仮定する。すなわち，

$$\sum_{j_r=k+r-1}^{n-1}\ \sum_{j_{r-1}=k+r-2}^{j_r-1}\cdots\sum_{j_3=k+2}^{j_4-1}\ \sum_{j_2=k+1}^{j_3-1}\ \sum_{j_1=k}^{j_2-1}=\binom{n-k}{r}$$

の成立を仮定する。このとき，性質 III より

$$\sum_{j_{r+1}=k+r}^{n-1}\ \sum_{j_r=k+r-1}^{j_{r+1}-1}\ \sum_{j_{r-1}=k+r-2}^{j_r-1}\cdots\sum_{j_3=k+2}^{j_4-1}\ \sum_{j_2=k+1}^{j_3-1}\ \sum_{j_1=k}^{j_2-1}$$

$$=\sum_{j_{r+1}=k+r}^{n-1}\binom{j_{r+1}-k}{r}=\binom{n-k}{r+1}$$

以上で示せた。　(証終)

性質 V

$$\sum_{j_r=k+r-1}^{n-1}\ \sum_{j_{r-1}=k+r-2}^{j_r-1}\cdots\sum_{j_3=k+2}^{j_4-1}\ \sum_{j_2=k+1}^{j_3-1}\ \sum_{j_1=k}^{j_2-1}j_1$$

$$=\frac{(n+r(k-1))}{r+1}\binom{n-k}{r}$$

(証明) $\sum$ の個数，すなわち r についての帰納法で示す。
$r=1$ のとき，

$$\sum_{k=j}^{n-1}j=\sum_{j=1}^{n-1}j-\sum_{j=1}^{k-1}j=\frac{1}{2}(n^2+k^2-n-k)$$

で一方，

$$\frac{n+k-1}{2}\binom{n-k}{1}=\frac{1}{2}(n^2+k^2-n-k)$$

であるので成立する。

次に r までの成立を仮定する。このとき,

$$\sum_{j_{r+1}=k+r}^{n-1}\sum_{j_r=k+r-1}^{j_{r+1}-1}\cdots\sum_{j_3=k+2}^{j_4-1}\sum_{j_2=k+1}^{j_3-1}\sum_{j_1=k}^{j_2-1} j_1$$
$$=\frac{(n+(r+1)(k-1))}{r+2}\binom{n-k}{r+1}$$
$$=\frac{\{n+(r+1)(k-1)\}(n-k)!}{(r+2)!(n-k-r-1)!}$$

が示せればよい。

$$\sum_{j_{r+1}=k+r}^{n-1}\sum_{j_r=k+r-1}^{j_{r+1}-1}\cdots\sum_{j_3=k+2}^{j_4-1}\sum_{j_2=k+1}^{j_3-1}\sum_{j_1=k}^{j_2-1} j_1$$
$$=\sum_{j=k+r}^{n-1}\frac{(j+r(k-1))}{r+1}\binom{j-k}{r}$$
$$=\frac{r(k-1)}{r+1}\sum_{j=k+r}^{n-1}\binom{j-k}{r}$$
$$+\frac{1}{r+1}\sum_{j=k+r}^{n-1} j\binom{j-k}{r} \qquad \cdots ①$$

であるが, 性質 II より

$$\sum_{j=k+r}^{n-1}\binom{j-k}{r}=\binom{n-k}{r+1}$$

さらに性質 I, III より

$$\sum_{j=k+r}^{n-1} j\binom{j-k}{r}$$
$$=\sum_{j=0}^{n-r-k-1}(k+r+j)\binom{r+j}{r}$$
$$=(k+r)\sum_{j=0}^{n-r-k-1}\binom{r+j}{r}+\sum_{j=0}^{n-r-k-1} j\binom{r+j}{r}$$
$$=(k+r)\binom{n-k}{r+1}+(r+1)\binom{n-k}{r+2}$$

これらを①に代入すると,

$$① = \frac{r(k-1)}{r+1}\binom{n-k}{r+1}$$
$$+\frac{1}{r+1}\left\{(k+r)\binom{n-k}{r+1}+(r+1)\binom{n-k}{r+2}\right\}$$
$$=\left\{\frac{r(k-1)}{r+1}+\frac{k+r}{r+1}\right\}\binom{n-k}{r+1}+\binom{n-k}{r+2}$$
$$=k\binom{n-k}{r+1}+\binom{n-k}{r+2}$$
$$=\frac{\{n+(r+1)(k-1)\}(n-k)!}{(r+2)!(n-k-r-1)!}$$

以上で示せた。 (証終)

さらに, $\sum$ の線型性から次の性質は明らかである。

性質 VI

$$\sum_{j_r=k+r-1}^{n-1}\sum_{j_{r-1}=k+r-2}^{j_r-1}\cdots\sum_{j_1=k}^{j_2-1}(\alpha a_{j_1}+\beta b_{j_1})$$
$$=\alpha\sum_{j_r=k+r-1}^{n-1}\sum_{j_{r-1}=k+r-2}^{j_r-1}\cdots\sum_{j_1=k}^{j_2-1} a_{j_1}$$
$$+\beta\sum_{j_r=k+r-1}^{n-1}\sum_{j_{r-1}=k+r-2}^{j_r-1}\cdots\sum_{j_1=k}^{j_2-1} b_{j_1}$$

これまでの二項係数の総和に関する諸性質を用いて, パスカルの三角形の拡張について, 定式化を試みる。

$n=1,2,3,\cdots$, および $0<r<n$ に対して,

$$\begin{cases} A(n,r)=A(n-1,r-1)+A(n-1,r) \\ A(n,0)=a_n \\ A(n,n)=b_n \end{cases}$$

により $A(n,r)$ を定める。

このとき,

$$\begin{aligned} A(n,1) &= A(n-1,0)+A(n-1,1) \\ &= A(n-1,0)+A(n-2,0)+A(n-2,1) \\ &= \cdots \\ &= A(n-1,0)+A(n-2,0)+ \\ &\qquad \cdots+A(1,0)+A(1,1) \\ &= a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+b_1 \\ &= \sum_{j_1=1}^{n-1} a_{j_1}+b_1 \end{aligned}$$

となる。同様に,

$$\begin{aligned} A(n,2) &= A(n-1,1)+\cdots+A(2,1)+A(2,2) \\ &= \sum_{j_2=2}^{n-1} A(j_2,1)+A(2,2) \\ &= \sum_{j_2=2}^{n-1}\left(\sum_{j_1=1}^{j_2-1} a_{j_1}+b_1\right)+b_2 \\ &= \sum_{j_2=2}^{n-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} a_{j_1}+b_1\sum_{j_2=2}^{n-1}+b_2 \end{aligned}$$

$$A(n,3) = A(n-1,2) + \cdots + A(3,2) + A(3,3)$$
$$= \sum_{j_3=3}^{n-1} A(j_3,2) + A(3,3)$$
$$= \sum_{j_3=3}^{n-1} \left(\sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} a_{j_1} + b_1 \sum_{j_2=2}^{j_3-1} + b_2 \right) + b_3$$
$$= \sum_{j_3=3}^{n-1} \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} a_{j_1} + b_1 \sum_{j_3=3}^{n-1} \sum_{j_2=2}^{j_3-1} + b_2 \sum_{j_3=3}^{n-1} + b_3$$

途中，性質 IV を用いると，帰納的に

$$A(n,r) = \sum_{j_r=r}^{n-1} \sum_{j_{r-1}=r-1}^{j_r-1} \cdots \sum_{j_1=1}^{j_2-1} a_{j_1}$$
$$+ b_1 \sum_{j_r=r}^{n-1} \sum_{j_{r-1}=r-1}^{j_r-1} \cdots \sum_{j_3=3}^{j_4-1} \sum_{j_2=2}^{j_3-1}$$
$$+ b_2 \sum_{j_r=r}^{n-1} \sum_{j_{r-1}=r-1}^{j_r-1} \cdots \sum_{j_3=3}^{j_4-1} + \cdots$$
$$+ b_{r-1} \sum_{j_r=r}^{n-1} + b_r$$
$$= \sum_{j_r=r}^{n-1} \sum_{j_{r-1}=r-1}^{j_r-1} \cdots \sum_{j_1=1}^{j_2-1} a_{j_1}$$
$$+ b_1 \binom{n-3}{r-1} + b_2 \binom{n-3}{r-2} + \cdots$$
$$+ b_{r-1} \binom{n-r}{1} + b_r$$
$$= \sum_{j_r=r}^{n-1} \sum_{j_{r-1}=r-1}^{j_r-1} \cdots \sum_{j_1=1}^{j_2-1} a_{j_1}$$
$$+ \sum_{j=1}^{r} b_j \binom{n-1-j}{r-j}$$

を得る。

$$\boxed{A(n,r) = \sum_{j_r=r}^{n-1} \sum_{j_{r-1}=r-1}^{j_r-1} \cdots \sum_{j_1=1}^{j_2-1} a_{j_1} + \sum_{j=1}^{r} b_j \binom{n-1-j}{r-j}}$$

今，2つの数列 a_n, b_n がともに等差数列であるときを考える。すなわち，$n = 1,2,3,\cdots$ に対して，$a_n = pn + q$，$b_n = rn + s$ とおく。このとき，性質 VI（線型性）より

$$A(n,r) = p \underbrace{\sum_{j_r=r}^{n-1} \sum_{j_{r-1}=r-1}^{j_r-1} \cdots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} j_1}_{\text{(i)}}$$
$$+ q \underbrace{\sum_{j_r=r}^{n-1} \sum_{j_{r-1}=r-1}^{j_r-1} \cdots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1}}_{\text{(ii)}}$$
$$+ r \underbrace{\sum_{j=1}^{r} j \binom{n-1-j}{r-j}}_{\text{(iii)}}$$
$$+ s \underbrace{\sum_{j=1}^{r} \binom{n-1-j}{r-j}}_{\text{(iv)}}$$

と表せる。

ここで，性質 V および性質 IV において $k=1$ とすることにより

$$\text{(i)} = \frac{n}{r+1}\binom{n-1}{r} = \frac{n}{r+1}\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$$
$$= \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = \binom{n}{r+1},$$
$$\text{(ii)} = \binom{n-1}{r}$$

となり，また性質 I から

$$\text{(iv)} = \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-3}{r-2} + \cdots \binom{n-r-1}{0}$$
$$= \sum_{j=0}^{r-1} \binom{n-r-1+j}{j} = \binom{n-1}{r-1}$$

を得る。さらに

$$\text{(iii)} = 1\binom{n-2}{r-1} + 2\binom{n-3}{r-2} + \cdots$$
$$+ (r-1)\binom{n-r}{1} + r\binom{n-r-1}{0}$$
$$= \sum_{j=0}^{r-1} (r-j) \binom{n-r-1+j}{j}$$
$$= r \underbrace{\sum_{j=0}^{r-1} \binom{n-r-1+j}{j}}_{(*)}$$
$$- \underbrace{\sum_{j=0}^{r-1} j \binom{n-r-1+j}{j}}_{(**)}$$

ここで，性質 I，II より

$$(*) = \binom{n-1}{r-1}, \quad (**) = (n-r)\binom{n-1}{r-2}$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned}(\text{iii}) &= r\binom{n-1}{r-1} - (n-r)\binom{n-1}{r-2} \\ &= r\left\{\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r-2}\right\} - n\binom{n-1}{r-2} \\ &= r\binom{n}{r-1} - n\binom{n-1}{r-2} \\ &= \frac{rn!}{(r-1)!(n-r+1)!} \\ &\quad - \frac{n(n-1)!}{(r-2)!(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}(r-(r-1)) \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} = \binom{n}{r-1}\end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{aligned}A(n,r) = p\binom{n}{r+1} &+ q\binom{n-1}{r} \\ &+ r\binom{n}{r-1} + s\binom{n-1}{r-1}\end{aligned}$$

> $n = 1, 2, 3, \cdots$，および $0 < r < n$ に対し，$A(n,0) = pn + q$，$A(n,n) = rn + s$ のとき
>
> $$\begin{aligned}A(n,r) = p\binom{n}{r+1} &+ q\binom{n-1}{r} \\ &+ r\binom{n}{r-1} + s\binom{n-1}{r-1}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} & s\binom{n-1}{r-1} & & q\binom{n-1}{r} & \\ r\binom{n}{r-1} & & \boldsymbol{A(n,r)} & & p\binom{n}{r+1}\end{array}$$

3．母関数を用いる方法

初期条件 $A(n,0) = a_n$，$A(n,n) = b_n$ がともに等差数列のときの $A(n,r)$ の定式化を，母関数を用いる方法によって試みる。すなわち，多項式 $f_n(x,y) = \sum_{r=0}^{n} A(n,r)x^{n-r}y^r$ について，係数 $A(n,r)$ を考察する。

今，$A(n,0) = n+2$，$A(n,n) = 3n+4$ のときの拡張されたパスカルの三角形を考える。

```
          /\
         3  7
        4 10 10
      5 14 20 13
    6 19 34 33 16
  7 25 53 67 49 19
```

まずこの三角形から，それぞれ多項式を作っていくと次のようになる。

$$\begin{aligned}f_1(x,y) &= 3x + 7y \\ f_2(x,y) &= 4x^2 + 10xy + 10y^2 \\ f_3(x,y) &= 5x^3 + 14x^2y + 20xy^2 + 13y^3 \\ f_4(x,y) &= 6x^4 + 19x^3y + 34x^2y^2 + 33xy^3 + 16y^4 \\ f_5(x,y) &= 7x^5 + 25x^4y + 53x^3y^2 + 67x^2y^3 \\ &\quad + 49xy^4 + 19x^5\end{aligned}$$

ここで例えば，$f_3(x,y)$ が $f_2(x,y)$ からどのように構成されているか考察してみる。$f_3(x,y)$ の係数について，x^3 と y^3 以外の係数は三角形の作り方から $f_2(x,y)$ の係数の和として生じている。これを踏まえると，$f_3(x,y)$ は次のように生成される。

$$\begin{aligned}f_3(x,y) &= 5x^3 + 14x^2y + 20xy^2 + 13y^3 \\ &= \underbrace{5x^3 + 4x^2y + 10xy^2}_{①} \\ &\quad + \underbrace{10x^2y + 10xy^2 + 13y^3}_{②}\end{aligned}$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
①&= 5x^3 + y(4x^2 + 10xy)\\
&= 5x^3 + y(4x^2 + 10xy + 10y^2 - 10y^2)\\
&= 5x^3 + y\left(f_2(x,y) - 10y^2\right)\\
②&= x(10xy + 10y^2) + 13y^3\\
&= x(4x^2 + 10xy + 10y^2 - 4x^2) + 13y^3\\
&= x\left(f_2(x,y) - 4x^2\right) + 13y^3
\end{aligned}
$$

と変形できるので，①＋② より

$$f_3(x,y) = (x+y)f_2(x,y) + x^3 + 3y^3$$

を得る。同様に，$f_3(x,y)$ から $f_4(x,y)$ は

$$f_4(x,y) = (x+y)f_3(x,y) + x^4 + 3y^4$$

も得られる。したがって，帰納的に

$$\begin{cases} f_n(x,y) = (x+y)f_{n-1}(x,y) + x^n + 3y^n \\ f_1(x,y) = 3x + 7y \end{cases}$$

となることが予想される。

一般に初期条件が，$A(n,0) = pn+q$，$A(n,n) = rn+s$ である等差数列のとき，母関数 $f_n(x,y) = \sum_{r=0}^{n} A(n,r)x^{n-r}y^r$ は，

$$\begin{cases} f_n(x,y) = (x+y)f_{n-1}(x,y) + px^n + ry^n \\ f_1(x,y) = (p+q)x + (r+s)y \end{cases}$$

を満たす。実際，第1式から，$A(n,r) = A(n-1,r-1) + A(n-1,r)$ を満たすのは明らかである。また，$y=0$ とすると，

$$f_n(x,0) = A(n,0)x^n$$

であるが，漸化式より

$$f_n(x,0) = xf_{n-1}(x,0) + px^n$$

となるので，$A(n,0)x^n = xA(n,0)x^{n-1} + px^n$ より

$$A(n,0) = A(n-1,0) + p$$

が成り立ち，さらに初期条件から $A(1,0) = p+q$ である。したがって，

$$
\begin{aligned}
A(n,0) &= A(n-1,0) + p\\
&= A(n-2,0) + 2p\\
&= \cdots = A(1,0) + (n-1)p\\
&= pn + q
\end{aligned}
$$

同様に，$x=0$ とおくと，$A(n,n) = rn+s$ が導ける。したがって，母関数 $f_n(x,y)$ における $x^{n-r}y^r$ の項の係数 $A(n,r)$ は

$$\begin{cases} A(n,r) = A(n-1,r-1) + A(n-1,r) \\ A(n,0) = pn + r \\ A(n,n) = rn + s \end{cases}$$

を満たしていることが分かる。

次に，漸化式

$$\begin{cases} f_n(x,y) = (x+y)f_{n-1}(x,y) + px^n + ry^n \\ f_1(x,y) = (p+q)x + (r+s)y \end{cases}$$

を解くことを考える。第1式の両辺を $(x+y)^n$ で割り，$\dfrac{f_n(x,y)}{(x+y)^n} = g_n(x,y)$ とおくと，

$$\begin{cases} g_n(x,y) = g_{n-1}(x,y) + p\left(\dfrac{x}{x+y}\right)^n + r\left(\dfrac{y}{x+y}\right)^n \\ g_1(x,y) = \dfrac{(p+q)x}{x+y} + \dfrac{(r+s)y}{x+y} \end{cases}$$

と表せる。したがって階差数列を考えることにより，

$$
\begin{aligned}
g_n(x,y) &= g_1(x,y) + \sum_{k=2}^{n}\left\{p\left(\frac{x}{x+y}\right)^k + r\left(\frac{y}{x+y}\right)^k\right\}\\
&= \frac{(p+q)x}{x+y} + \frac{(r+s)y}{x+y}\\
&\quad + \frac{px^2}{y(x+y)^2}\left(1 - \left(\frac{y}{x+y}\right)^{n-1}\right)\\
&\quad + \frac{ry^2}{y(x+y)^2}\left(1 - \left(\frac{x}{x+y}\right)^{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

両辺に $(x+y)^n$ をかけて，

$$
\begin{aligned}
&f_n(x,y)\\
&= \underbrace{(p+q)x(x+y)^{n-1}}_{(a)} \underbrace{+(r+s)y(x+y)^{n-1}}_{(b)}\\
&\quad \underbrace{+\frac{px^2}{y}(x+y)^{n-2}}_{(c)} \underbrace{+\frac{ry^2}{x}(x+y)^{n-2}}_{(d)}\\
&\quad \underbrace{-\frac{px^{n+1}}{y(x+y)}}_{(e)} \underbrace{-\frac{ry^{n+1}}{x(x+y)}}_{(f)}
\end{aligned}
$$

となる。ここで，$0 < r < n$ なる r について，$x^{n-r}y^r$ の係数を求めることを考える。ここで，(e) および (f) の項はそれぞれ，$r=0$ および

$r = n$ のときの項として，(c) および (d) によって相殺される。したがって，(e) および (f) の項は無視してよい。したがって $x^{n-r}y^r$ の係数は，次のそれぞれの項を取り出して考えればよい。

(a) :$(x+y)^{n-1}$の$\binom{n-1}{r}$

(b) :$(x+y)^{n-1}$の$\binom{n-1}{r-1}$

(c) :$(x+y)^{n-2}$の$\binom{n-1}{r+1}$

(d) :$(x+y)^{n-2}$の$\binom{n-1}{r-2}$

したがって，$x^{n-r}y^r$ の係数 $A(n,r)$ は

$$\begin{aligned}
&A(n,r)\\
&= (p+q)\binom{n-1}{r} + (r+s)\binom{n-1}{r-1}\\
&\quad + p\binom{n-1}{r+1} + r\binom{n-1}{r-2}\\
&= p\left\{\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r+1}\right\} + q\binom{n-1}{r}\\
&\quad + r\left\{\binom{n-1}{r-2} + \binom{n-1}{r-1}\right\} + s\binom{n-1}{r-1}\\
&= p\binom{n}{r+1} + q\binom{n-1}{r}\\
&\qquad + r\binom{n}{r-1} + s\binom{n-1}{r-1}
\end{aligned}$$

となる。

4. パスカルの三角形拡張のいくつかの例

(例 4-1)

$\underline{A(n,0) = A(n,n) = n \text{ のとき}}$

これは $p = r = 1, q = s = 0$ のときであるから

$$A(n,r) = \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r-1}$$

と表せる。

$$\begin{array}{c}
\wedge\\
1 \quad 1\\
2 \quad 2 \quad 2\\
3 \quad 4 \quad 4 \quad 3\\
4 \quad 7 \quad 8 \quad 7 \quad 4\\
5 \quad 11 \quad 15 \quad 15 \quad 11 \quad 5\\
6 \quad 16 \quad \boxed{26} \quad 30 \quad 26 \quad 16 \quad 6\\
7 \quad 22 \quad 42 \quad 56 \quad 56 \quad 42 \quad 22 \quad 7
\end{array}$$

図 3: パスカルの三角形の拡張

$$\begin{array}{c}
\wedge\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad \underline{6} \quad \boxed{15} \quad \underline{\underline{20}} \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}$$

図 4: パスカルの三角形

すなわち，$A(n,r)$ は $\binom{n}{r}$ の両隣の和である。(図 での $A(6,2) = 26$ は，パスカルの三角形図 における $\binom{6}{2}$ の両隣 6 と 20 の和となっている。)

(例 4-2)

$A(n,0)=A(n,n)=n+2$ のとき

これは $p=r=1, q=s=2$ のときであるが

$$\begin{aligned}A(n,r)&=\binom{n}{r+1}+2\binom{n-1}{r}\\&\quad+\binom{n}{r-1}+2\binom{n-1}{r-1}\\&=\binom{n}{r+1}+\binom{n}{r-1}+2\binom{n}{r}\\&=\binom{n}{r+1}+\binom{n}{r}+\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}\\&=\binom{n+1}{r+1}+\binom{n+1}{r}=\binom{n+2}{r+1}\end{aligned}$$

3 3
4 6 4
5 10 10 5
6 15 20 15 6
7 21 35 35 21 7
8 28 56 70 56 28 8

図 5: パスカルの三角形の拡張

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

図 6: パスカルの三角形

$A(n,r)=\binom{n+2}{r+1}$ となるのは，このパスカルの三角形の拡張（図 ）がパスカルの三角形（図 ）に含まれているのでほぼ明らかである。

したがって同様に考えれば，パスカルの三角形の一部をいつでも抜き出すことができる。

5. 各段の和について

パスカルの三角形において，各段の数値の和が 2 のべき乗になっていることはよく知られている。すなわち n 段目の数値の和は

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}=2^n$$

となる。

では一般の $A(n,r)$ において第 n 段目の数値の和はどのようになるだろうか。本節ではこれを考察する。

まずいくつかの準備をする。

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r+1}&=\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}\\&=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}-\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right\}\\&=2^n-(n+1) \qquad \cdots②\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n-1}{r}&=\sum_{r=0}^{n}\binom{n-1}{r}-\binom{n-1}{0}\\&=2^{n-1}-1 \qquad \cdots③\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r-1}&=\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r}-\left\{\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right\}\\&=2^n-(n+1) \qquad \cdots④\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n-1}{r-1}&=\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}-\binom{n-1}{n-1}\\&=2^{n-1}-1 \qquad \cdots⑤\end{aligned}$$

今，初期条件として $A(n,0)=pn+q$，$A(n,n)=rn+s$ での $A(n,r)$ を考え，その第 n 段目の和を求める。

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{n}A(n,r)\\&=A(n,0)+\sum_{r=1}^{n-1}A(n,r)+A(n,n)\\&=(p+r)n+(q+s)\\&\quad+p\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r+1}+q\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n-1}{r}\\&\quad+r\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r-1}+s\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n-1}{r-1}\end{aligned}$$

これに②〜⑤を代入してまとめると，

$$\sum_{r=0}^{n} A(n,r) = (p+r)2^n + (q+s)2^{n-1} - (p+r)$$

となる。

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{n} A(n,r)\\ &= (p+r)2^n + (q+s)2^{n-1} - (p+r)\\ &= (p+r)\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} + (q+s)2^{n-1}\end{aligned}}$$

パスカルの三角形は，$p=r=0$，$q=s=1$ のときであるが，これを上に代入すると

$$\sum_{r=0}^{n} A(n,r) = 2^n$$

となる。したがって上の式はパスカルの三角形を含んでいる。

(例 5-1)

$A(n,0)=A(n,n)=n$ のとき

$p=r=1$，$q=s=0$ であるので，

$$\sum_{r=0}^{n} A(n,r) = 2\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} 2^k$$

となる。すなわち各段の和は公比が 2 の等比数列の和となっている。

```
              /\
             1  1
            / \/ \
           2  2  2
          / \/ \/ \
         3  4  4  3
        / \/ \/ \/ \
       4  7  8  7  4
      / \/ \/ \/ \/ \
     5  11 15 15 11  5
    / \/ \/ \/ \/ \/ \
   6  16 26 30 26 16  6
```

(例 5-2)

$A(n,0)=n+1$，$A(n,n)=-n+1$ のとき

$p=q=s=1$，$r=-1$ であるので，

$$\sum_{r=0}^{n} A(n,r) = 2\cdot 2^{n-1} = 2^n$$

となる。すなわちこの $A(n,r)$ はパスカルの三角形と同じ特徴を持つ。

```
              /\
             2  0
            / \/ \
           3  2  -1
          / \/ \/ \
         4  5  1  -2
        / \/ \/ \/ \
       5  9  6  -1  -3
      / \/ \/ \/ \/ \
     6  14 15  5  -4  -4
    / \/ \/ \/ \/ \/ \
   7  20 29 20  1  -8  -5
```

6. おわりに

本教材はパスカルの三角形，すなわち二項係数がどのように生じているのかを振り返る契機になる。パスカルの三角形は，漸化式

$$\begin{cases} A(n,r) = A(n-1,r-1) + A(n-1,r) \\ A(n,0) = A(n,n) = 1 \end{cases}$$

の一般項であると見ることができる。一方でパスカルの三角形は $(x+y)^n$ を展開したときの係数とも見ることができる。これらを繋いでいるのが，母関数としての多項式であると捉えれば，二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ の母関数が $(x+y)^n$ であることになる。このような見方も大切にしたい。

なお，本稿では母関数を用いた第 3 節について，初期条件が等差数列の場合のみを考察している。より一般に，初期条件を $A(n,0)=a_n$，$A(n,n)=b_n$ として母関数の漸化式を考えると，

$$\begin{aligned} f_n(x,y) &= (x+y)f_{n-1}(x,y) \\ &\quad + (a_n - a_{n-1})x^n + (b_n - b_{n-1})y^n \end{aligned}$$

となる。したがって a_n および b_n が等差数列の場合とは，漸化式における x^n および y^n の係数が定数のときである。これを拡張することも考えられる。例えば二項間の差が等比数列となる a_n および b_n を考えると，またちがった拡張が得られる。

本稿の教材をそのまま生徒対象に授業を行うことは困難であろうが，発展的に考える姿勢や拡張する視点など，数学教師として教材研究する対象としては価値があろう。

【参考文献】

野崎昭弘 (1994)『組合せ論・グラフ理論』日本評論社

（たかはし　ひろあき
東京学芸大学附属国際中等教育学校
〒178-0063　練馬区東大泉 5-22-1）