学芸大数学教育研究　第4号　1992　89－98

星7角形を題材とした図形指導

坂井　　裕

星5角形の内角の和を求める問題は通常の授業でしばしば取り扱われているようである。星5角形を取り扱い、さらにひきつづき星7角形の内角の和を求める問題を題材とした授業を行なうようにするとよいと考える。その理由として、星5角形の問題解決における生徒の着想を生かし、その考え方の定着をはかる場面の設定ができること、一般化への帰納的扱いのもとになる図形であること、図形の性質や問題を追求する態度の育成が期待できることがあげられる。星5角形の指導から星7角形への指導、帰納的に一般化する指導過程の骨子を述べる。

1. はじめに

星多角形について、次のことが知られている。（初等数学、1988）

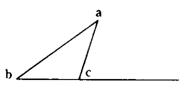
頂点がn個あって、ある頂点から数えて次のk番目の頂点とを結んでできる星n角形の内角の和をＳとすると、
$S=2(n-2k)\angle R$　である。ただし、nは３以上の自然数、kは１以上$\frac{n}{2}$未満の自然数とする。

ここで、$n=5$、$k=2$とすると、中学校の数学の図形指導の授業でもしばしば取り上げられている星５角形ができる。星５角形の内角の和は$2\angle R$であることを見い出させる問題を設定すると、生徒はそれぞれの持ち味を生かしいろいろな着想をもとに考える。そして、生徒の着想の多様性に指導する側も心ひかれ、授業も自然に活気をおび、生徒と指導者がともに感激を味わうことができる大変よい題材の一例である。星５角形を題材とした指導では、それまでの生徒の既習事項の応用のしかたを学習させる場面として使う場合と、星５角形を取り上げることによって星７角形へ発展させる糸口とする場合とが考えられる。すべての生徒を対象とした授業では前者が一般的な扱い方であろう。そこでの生徒の考え方を生かす指導をするとなると後者の取り上げ方が有効であると思われる。本稿では、後者の場合について考えることにしたい。つまり、生徒の考え方を生かすということを星５角形と星７角形を題材として具体的に述べることを中心とし、さらに星７角形の扱い方について考察する。単に生徒の考え方を生かすといってもいろいろな生かし方があるように思える。生徒が考えたことを発表させ生徒全員に知らせるといったことも生徒の考え方を生かすことであると考えられるが、生徒の発表した考え方をさらにひきつづき他の場面で使わせることが生徒の考え方の生かし方であり、その考え方を身につけさせるためには必要なことと考える。このようなねらいのもとに本稿では星５角形と星７角形を題材として、実際の指導過程の骨子を述べる。な

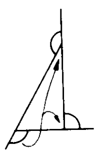
お、ここでは星5角形と星7角形を題材とするが、本稿のねらうことは、それ以外の題材においてもそこでの精神と同じように取り扱うことを期待している。

2. 星多角形があらわれる場面

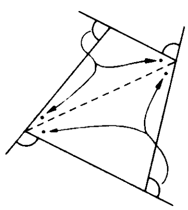
星5角形は、教科書ではまとめの問題などで取り上げられることが多いようであるが、実際の授業では、次のような場面で星多角形があらわれる。それは、多角形の外角の和を求める場面である。既習事項として、3角形のひとつの外角はその内対角の和に等しいということがある。この性質を指導する際の扱い方として、次の3つのことを同等に取り上げて扱うようにする。つまり、2つの内対角 a と b の和は c に等しくなること、外角 c は内対角 a と b へ分散することができること、a は $c-b$、あるいは b は $c-a$ とあらわせることである。この3つの考え方ができるようにしておくと生徒がいろいろと考える際の根拠を与えることになる。



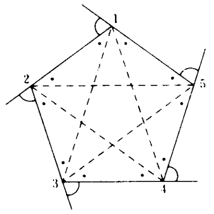
3角形の外角の和を生徒に求めさせると、1つの外角をその内対角へ分散させ平角を2つつくる考え方をすることがある。



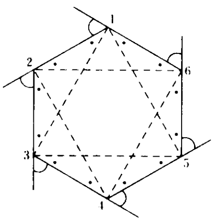
この考え方に興味をもつ生徒は4角形の外角の和を求めるときにもまたもこの考え方を使おうとする。対角線を1本ひくことにより、こんどは2回同じ考え方を使用することによって、平角を2つつくることに成功する。さらに、5角形を取り上げてみよう。このとき先をいそいで、n 角形の外角の和を一般的に通常の方法で求める方向へ展開していくとこれからあとに記述することは生じないが、ここであえて、5角形、6角形、7角形などを取り上げてそれぞれの場合について実際に確かめさせると、次の点線で示した図形があらわれる。

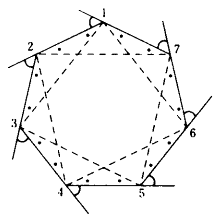


5角形では、内部に星5角形があらわれ、5角形の外角の和は5角形の内角の和から星5角形の内角の和をひくことにより求められる。



6角形では3角形が2つ重なった図形が内部にできる。7角形では、内部に1筆書きでできる星7角形ができ、初めに記述した定理において、$n=7$、$k=2$ の場合にあたる図形があらわれる。この時点でも、頂点の数が偶数と奇数とでは異なる図形ができることは予想できるかもしれない。このように取り扱うことによって、星多角形を問題解決の場面で必要なものとして意識づけることができるようになる。



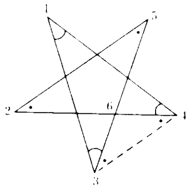


3. 生徒の考え方を生かす指導

星5角形の内角の和はいろいろな考え方で求めることができるが、ここではそれらのうちの4つについて取り上げ、そのときの生徒の考え方の生かし方について考えてみる。

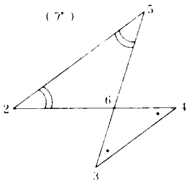
(1)　隣りあう頂点を結ぶ考え方（考え方１）

この考え方は、３角形の内角の和に結びつけるもので、次の図形の性質が根拠になっている。

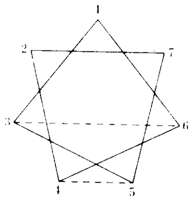


右の星５角形１２３４５で、∠２＋∠５＝∠３＋∠４となることである。この性質は、外角∠６と∠２＋∠５が等しく、また、∠３＋∠４とも等しいからと考えるか、あるいは、３角形の内角の和および対頂角が等しいことから考えつくことが多いようである。つまり、この考え方のもとには２つの角を移動するという見方ができているのである。すると、移動しないもともとの星５角形の内角を含む３角形１３４の内角にぴったり集められた図形が構成される。この考え方は、既習事項がうまく使われており明快であるにもかかわらず案外それに気づきにくいことがあり生徒が感心する導き方のひとつでもある。この考え方で使われている本質的なことは、隣りあう２つの頂点を結ぶという着想、そして、図形(ア)をつくり、角を移動するということである。そこでこのような生徒の着想を生かすことを考えてみよう。つまり、このような着想が生じる場面を再度設定してみることがその着想を生かすことになると考える。あるいは、その着想が生かされるかどうかを確かめる場面を設定するというい方をしたほうがよいかもしれない。

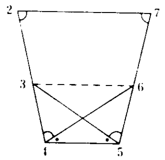
(ア)



$n=7$の場合、$k=1$、２、３の３通りが考えられるが、ここでは$k=2$のときを取り上げることにする。すなわち、$n=5$の場面にひきつづき$n=7$の場面を取り上げてみるわけである。$n=7$のときの問題は、教科書などでは発展的な問題として取り扱われていることもある。$n=5$のときの考え方によれば、隣りあう２頂点を結び、の形の図形をつくり、２つの角を移動してみるわけである。頂点４と５を結び、頂点３と６とを結んでみると、図形３５４６をつくることができる。したがって、$n=7$のときは、星７角形の内角は図形(イ)のように４角形２４５７の内角に含められてしまう。つまり、星５角形の内角は３角形の内角に含められてしまい、星７角形では４角形の内角に含められることがわかる。星７角形のこの場面において、星５角形で使った隣りあう頂点を結んで、２つの角を移動するという着想が生かされたことになる。星５角形での着想が使えることがそのときの考え方が生かされたと考えたい。



(イ)



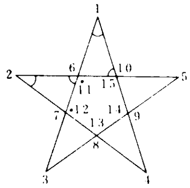
なお、星７角形の内角の和は、４角形の内角の和と３角形の内角の和を加えたものになることは生徒にとっては容易に把握できると思われる。

(2)　外角とその内対角による考え方（考え方２）

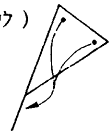
星５角形の内角の和を求める考え方として、３角形のひとつの外角はその内対角の和に等しいという性質と平角を使うものがある。使用される既習事項はそれらの性質と５角形の

内角の和が540°であることである。

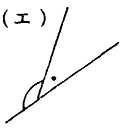
右の星5角形12345で、∠1と∠10の和は∠11、∠2と∠6の和は∠12に等しい。このように考えて、内部にできている5角形の内角に星5角形の内角を集める。そして、余分に加えた角をひくことにより、星5角形の内角の和を求める考え方である。この考え方では、2つの図形(ウ)、(エ)の性質が基本になっている。考え方の背景には、1つの図形の内角に分散している角を集めるという意識があり、また、余分であると思われる角を加えてもあとからひけば変わらないとする意識が必要と思われる。



（ウ）



（エ）



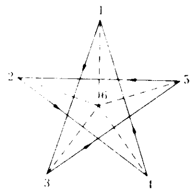
平面図形の性質の指導の初期には平角の利用のしかたを把握していることが大変役立つ。したがって、平角が2つあるいはそれ以上の角に分割されているときに、180°をそれら分割された角の大きさの和とみること、また、角を移動して平角をつくることを意識的に強調する指導は大切なポイントである。このことは、案外やさしくあたりまえのことのように考えがちで、生徒に対しても容易に使えるものであると思ががちであるがこれらの考え方になじめるような題材を使用して強く意識づけておくようにしたい。また、ここでは、内対角の和を外角へ移動しているが、逆に、1つの外角をその内対角へ分散させて、2つの内対角の和としてとらえることも新しい考え方を生み出すことに結びつくものであるので、取り上げておきたい。ここでの星5角形の着想を星7角形で生かすことは、生徒にとってはかなり行ないやすいように思える。それは、星5角形の5つの頂点を使って5つの3角形に注目したことを、星7角形では、それを7つの頂点で行なえばよく、そのほかのことがらは変わらず星5角形での推論がそのまま使用できるからである。つまり、星5角形での考え方は星7角形を取り扱うことによって、その考え方が生かされることになる。さらに、ここでは5角形の外角の和も7角形の外角の和もともに等しく360°であることを使用することを通して、常に多角形ならば外角の和は一定であることの性質の必要性に対する意識も増大させる。

(3)　3角形に分割する考え方（考え方3）

4角形や5角形あるいはn角形の内角の和を求めるときに多角形の内部に一点をとり、それと各頂点とを結び3角形に分割して考える生徒の反応の仕方がある。この考え方の背景には、2つの頂点を結び対角線をひくことによって、2つあるいは3つの3角形に分割して、3角形の内角の和の性質を使用することが特殊な場合であるとするとらえ方が働いている。この考えのうえに立てば、頂点と頂点を結ぶ分割の仕方だけではなく、ほかの分割の仕方へと考えをひろげることができ、しばしば授業でも取り上げられたり、生徒の反応にも見うけられたりするもので、頂点のかわりに、辺上の1点と各頂点を結んで分割する方法、内部あるいは外部の1点と各頂点とを結んで3角形に分割する方法が生じる。5角形の内角の和を求める場面を設定し、内部に1点をとり、3角形に分割して考える指導

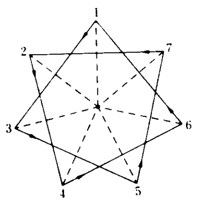
をすれば、星５角形の内角の和を求める場面でもその着想が生かされる。

図形の内部に１点をとり、３角形に分割して考える方法も、あとから余分に加えた分をひくという観点からは(2)の考え方と同じである。星５角形の場合は、



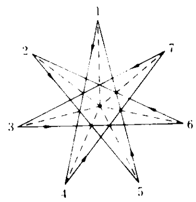
右の星５角形１２３４５のように内部の１点と各頂点とを結ぶ考え方である。５角形のときと異なることは、図形がやや複雑になり、どの３角形を利用したらよいのかとまどうことである。そのため、着想は生かされるが生徒の推論は行きどまり、新たな考え方への変更を加えねばならない場合も生ずる。星５角形の３角形分割の仕方は、一筆書きする順に２つの頂点と内部の点とを結んでできる３角形を使用すればよい。つまり、３角形１３６、３５６、５２６、６２４、６４１の５つの３角形の内角の和を加えることになる。

そして余分に加えた分をひくわけであるが、内部の点のまわりにできる角が重なりあうために余分に加えた角の大きさを求めるのに手間どるかもしれない。次に、星５角形の内角の和を求めるために使用した３角形分割の着想と内角の和を求める考え方とを生かすために星７角形の場面を取り上げる。つまり、星５角形の場合の一筆書きの順にそって３角形をつくることを強調しておけば、星７角形の場合にも頂点１から順に辺１３、辺３５、辺５７というようにそれぞれを１辺とする３角



形をつくっていけば星５角形での３角形分割の着想が生かされる。星７角形では、このようにしてつくった７つの３角形の内角の和から、余分に加えた内部のまわりの角の大きさをひけばよいわけである。そこでは、内部の点のまわりにできる余分な角はきちんと印をつけるなり、あるいは一筆書きをするときに何周まわるかをみるなりする考え方も生かせることになる。

一方、星７角形の考え方は、右の図のような星７角形の場合にも生かすことができる。



$n=7$、$k=3$の場合にあたるものである。

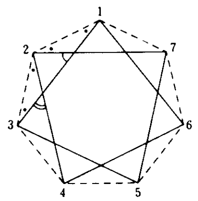
一筆書きの順にそって７つの３角形をつくり、それらの内角の和から、内部の点のまわりの余分に加えた角の大きさ360°×３（３周分）をひく考え方をすればよいからである。

(4)　すべての頂点を結ぶ考え方（考え方４）

考え方１では隣りあう頂点を結んだが、星５角形の内角の和の求め方の生徒の反応として、すべての頂点を結んで凸５角形をつくるものがある。この考え方のもとで使用される図形の性質は、外角と内対角、５角形の外角の和、５角形の内角の和であり、これらの性質がうまく結びつけられれば解決に成功するわけである。そこで、星５角形の内角の和を求めるときに使用したいくつかの性質を各頂点を結んで凸５角形をつくるという着想とともに生かすことを考えたい。

星７角形の内角の和を求める場面を設定することにより、その考え方が生かされる。各頂点を結ぶ星５角形での考え方を星７角形の場合にも同じように使うことによって解決で

きるからである。各頂点を結ぶという着想のもとに使用される性質とともに星5角形での考え方が再現される場面が設定されるわけである。

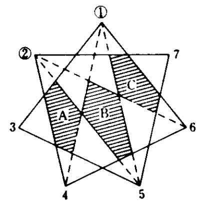


(5) 星5角形をもとにした考え方（考え方5）

ここで取り上げることは、これまでの星5角形の内角の和を求める考え方の生かしかたとは異なる。ここでは星5角形そのものを使う着想を考えてみたい。せっかく星5角形の内角の和を取り上げるのであれば、その問題がさらにそれとして役立つ使い方をしたいわけである。つまり、そのもの自身を使い、星5角形を取り扱ったことを一層価値づけようとする精神で星7角形を取り上げるのである。

星7角形は星5角形を基本の図形と考えると、3つの星5角形に分割することができる。（初等数学、1988）この分割の仕方は次のようにすると規則的に使える考え方として生徒に指導することができよう。

隣りあう2つの頂点に注目する。例えば、①と②とする。頂点3と6の間にある頂点4と5と頂点1とをそれぞれ結ぶ。次に、頂点4と7の間にある頂点と頂点2とをそれぞれ結ぶ。このようにつくった図形において、5角形Aと5角形B、5角形Cをそれぞれとりまく星5角形の内角の和に星7角形の内角は分割することができる。



つまり、頂点1と結んだ線分と頂点2と結んだ線分との交点によって連結される5角形をとりまく星5角形の内角をつぎつぎに加えていくとちょうど星7角形の内角に一致することになる。さらに星9角形へ発展させると、この考え方は一層明確に把握することができるようになる。したがって、このように扱えば、星5角形の内角の和が180°であるという性質を直観的に活用できる場面の設定ができる。

4. 一般化（n－4）×180°への帰納的扱いによる指導

中学校課程における図形指導では、図形の性質を帰納的に一般化する過程の指導を通して図形の性質を見い出していく力を育てることも大切なねらいの1つである。つまり、2つの伴なって変わることがらがあり、その一方を変えるとそれに伴なって他方がどのように変わるかに注目することに重点を置いた扱いといってもよい。これは、いわば関数的な考え方に属するものである。このような扱いは図形の学習の初期によくなされることでもある。

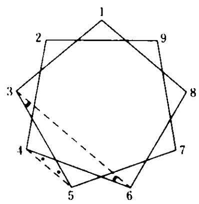
ひとつの事例としては、多角形の内角の和あるいは多角形の外角の和の求め方の指導場面をあげることができる。つまり、まず3角形の場合で考え、そして4角形、5角形へと進めて規則性を見い出し、多角形の内角の和の場合もそれを使って解決するといった取り扱いである。このような一般化への帰納的扱いは生徒にもなじみやすく、見通しを立てようとするための意識が強く働き、意欲的に取り組ますことができるように思われる。ここでは、3.で取り扱った考え方をもとに、さらに帰納的に一般化する指導過程の概略を考え

てみたい。ただし、紙面の関係でここで扱う題材は $k=2$ の場合とする。

(1) 考え方１による指導過程

授業において星７角形の内角の和を取り扱う段階で、進んだ生徒においては星多角形の場合はどうなるのだろうかという課題をいだく場合もあろう。また、星５角形の内角の和は３角形の内角の和であり、星７角形の内角の和は３角形の内角の和と４角形の内角の和を加えたものであった。だから、星９角形の内角の和は４角形の内角の和と５角形の内角の和となるのではないかと思いつく場合もあろう。実際に星多角形をかき、調べることはそれほどむずかしくはない。やや図形が複雑になり、それだけでいや気がさしてくる生徒もいるであろうが、星９角形を書いたプリントを用意して、時間を十分にとればかなりねばり強く取り組ませることが期待できる。

右の図で、頂点４と５を結び、頂点３と６を結ぶと、４角形１３６８の内角の和と５角形４５７９２の内角の和を加えたものになることが把握できよう。実際の指導場面では、この事実をもとに次表のようにまとめさせながら星 n 角形の場合を予想させ、求めさせてみればよい。



表中の○印は、各星多角形の内角の和がそれらの多角形の内角の和になることを表す。ここでは n は奇数としておく。

	3角形	4角形	5角形	6角形	$\frac{n-1}{2}$角形	$\frac{n+1}{2}$角形
星５角形	○					
星７角形	○	○				
星９角形		○	○			
星11角形			○	○		
星 n 角形					○	○

星１１角形の内角の和を求める段階までくると、ほとんど確実に星 n 角形の場合の結果を確信するであろう。星 n 角形の場合は、文字式を計算して、

$$\left(\frac{n-1}{2}-2\right)\times 180^\circ+\left(\frac{n+1}{2}-2\right)\times 180^\circ$$

であることから、$180(n-4)$ を導くことができる。この結果は、本稿のはじめに掲げた定理において $k=2$ を代入した場合にあたる。

(2) 考え方２による指導過程

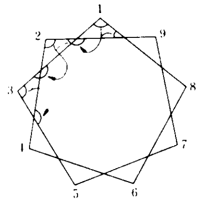
考え方２は多角形の外角の和を求めるときに、n 個の平角を加えておき、その和から n 角形の内角の和をひくという考え方と類似している。つまり、平角のかわりに内対角の和を星多角形の頂点 n の数だけ加え、その和から内部にできている多角形の外角の和をひく考え方である。

星５角形と星７角形を取り扱えば、星 n 角形の場合も同じように考えられることはかなり容易に納得させることができよう。つまり、頂点の数が増加しても、考え方２を使う回数が n に伴って増加するだけであるから、考え方１の場合とくらべて把握しやすいと思われる。

実際には星９角形の場合を調べさせれば、帰納的に一般化することはかなり容易であろうと思われる。

したがって、考え方２によれば星 n 角形の

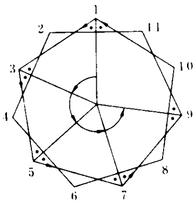
内角の和は、n角形の内角の和からn角形の外角の和をひけば求めることができることが納得させられよう。この場面では、n角形の



内角の和を表す式そしてn角形の外角の和の2つを一般的な性質として問題解決場面で使用できるように取り扱えることになる。この場合には、$180(n-2)-360$ を計算すればよいので生徒にとっては把握しやすいと思われる。この着想をもとにした考え方は帰納的というよりはかなり演繹的なものである。

(3)　考え方3による指導過程

考え方3によれば、一筆書きの順に3角形の数がいくつできるかをみればよい。したがって、星7角形と同じ扱いができる。頂点の数が増加しても図形がやや複雑になるが3角形がいくつできるかの把握はできよう。また、きちんと図中に印をつけるなどしてみれば内部のまわりの余分に加えた角が360°の何倍



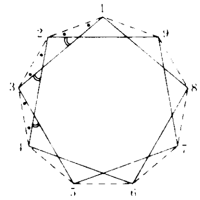
になるかも把握できよう。これも、次表のようなまとめをさせることを通して、見通しを立てやすいようにさせるとよい。

	3角形	360°	和
星5角形	5	2	$180°\times 5-360°\times 2$
星7角形	7	2	$180°\times 7-360°\times 2$
星9角形	9	2	$180°\times 9-360°\times 2$
星11角形	11	2	$180°\times 11-360°\times 2$
星n角形	n	2	$180°\times n-360°\times 2$

星7角形あるいは星9角形について調べさせれば、3角形の数は星n角形の場合はn個であること、そして、内部の点のまわりの余分な角はいつも360°×2（2周分）であることが帰納的に把握できよう。このようなことに気づけば、まもなく一般式を見い出すことに成功すると思われる。

(4)　考え方4による指導過程

考え方4では、頂点の数が増えることによって、3角形の数もそれに伴なって増えるから、星n角形の場合にはn個の3角形ができることはかなり容易に把握できよう。次の図のように星9角形の場合を取り扱うことによって、そのような見通しをかなりはっきりと意識できよう。この考え方4と考え方2とは類似しており、考え方4では内対角の和を外



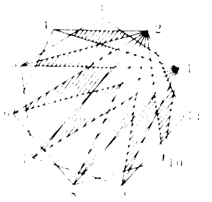
角に移動し、多角形の内角の和から外角の和をひくことになる。つまり、内対角と外角を使う順序が逆になるだけであるから、考え方2を取り上げてあれば、考え方4による推論はかなり容易に行なわれると思われる。

(5)　考え方5による指導過程

考え方5によると、星5角形がどこにいくつできるかを、前述したつくり方にしたがって確かめればよい。星9角形や星11角形を取り上げ、実際にやってみれば、星5角形や星7角形と同じように考えられることを納得し、帰納的に一般化することができよう。一例として、星11角形の場合は、次の図のようになる。

次の図で、頂点4から頂点9までのそれぞれと頂点1とを結び、また、頂点5から頂点10のそれぞれと頂点2とを結ぶ。それらの

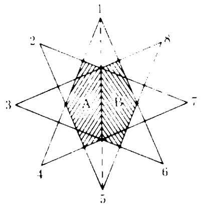
対角線の交点で連結される５角形に注目していけばよいことが確かめられよう。これらの結果を次表のようにまとめることによって、



星 n 角形の場合についての見通しが立てられると思われる。

	５角形の個数	星多角形の内角の和
星５角形	１＝５－４	180°×１
星７角形	３＝７－４	180°×３
星９角形	５＝９－４	180°×５
星11角形	７＝11－４	180°×７
星 n 角形	$n-4$	$180°(n-4)$

なお、n が偶数の場合についても取り扱うことができる。例えば、右の図のような星８角形の場合で、$k=3$ のときを考えてみると２つの星５角形ＡとＢの組み合わせからできていることが確認できよう。



5. 一般化 $(n-2k)\times180°$ への帰納的扱いによる指導

これまでに取り扱ってきた星多角形では、$k=2$ の場合が中心であった。$k=1$ の場合は多角形の内角の和を求めることであるから、これをあわせると $k=1$ の場合と $k=2$ の場合がそろったことになる。この段階からでも、$k=3$、４、５などの場合について見通しが立てられるかもしれないが、$k=3$ の場合について実際に確認したほうがよい。

また、これらの結果を次表のようにまとめていけば、星 n 角形の内角の和に対して一層見通しが立てやすくなろう。さらに、このようにつくった表を全体的に見させることにより、星５角形の内角の和が 180° であったことが星 n 角形になっても保持される場合があることも見い出せる。

n ＼ k	1	2	3	4	5	k
星５角形	180°×3	180°×1				
星７角形	180°×5	180°×3				
星９角形	180°×7	180°×5				
星11角形	180°×9	180°×7			180°×1	
星 n 角形	$180°\times(n-2)$	$180°\times(n-4)$	$180°\times(n-6)$	……	……	$180°\times(n-2k)$

なお、この表に n が偶数の場合をつけ加えてもよい。

6. おわりに

以上で星７角形を題材とした指導過程について言及してきた。ここで星７角形の内角の和を求める問題のおもな活用の仕方についてまとめておく。

(1) 生徒の着想を生かし、考え方の定着をはかる場面の設定ができる。

(2) 一般化への帰納的な扱いによる指導のもとになる図形である。

(3) 図形の性質を見い出したり、問題をより深く、また、ひろげるなど追求する態度の育成ができる。

本稿では、星 n 角形の内角の和の一般式を演繹的に求める指導に重点を置くことはせずに、生徒が自主的に図形の性質や問題を追求できるような展開過程を意図して述べてみた。したがって論理的には不備な点が多々存在するが、図形指導の本稿のねらいからみれば、本稿で述べた帰納的扱いによる指導において

はその不備にもかかわらずそれ以上の指導価値があるものと考える。実際の授業においては、生徒の実状に応じてここで述べた内容の一部を取り上げてもよいであろうし、また、ある程度以上の内容は進んだ生徒あるいは意欲的な生徒に対する研究課題として自主的に研究させるような利用の仕方もあろう。なお、ここで取り上げた題材には、実際の生徒の様相および授業時間数に応じて多様にそして柔軟に指導者の裁量によって指導過程がつくれるよさもある。

参考文献

倉本　理：「星多角形の定理＜その二＞」、初等数学、早川学而個人研究誌、1988年4月、PP. 28－29.

倉本　理：「星多角形の定理＜その四＞」、初等数学、早川学而個人研究誌、1988年8月、P. 25.

（さかい　ゆたか
東京学芸大学教育実習研究指導センター
〒184　小金井市貫井北町4－1－1）