擬変数の役割と機能：命題の発見過程に焦点を当てて

藤井　斉亮

要　約

本稿の目的は，擬変数の役割と機能を命題の発見過程に焦点を当てて明らかにすることである。そのために，学部３年生の課題レポートを分析した。その結果，一般化を志向した探究過程では，「振り返る」ことが重要だが，それだけでは不十分であり，そこでの意味や表現形式を新しい概念（集合）の視点で「見直す」ことが大事である。「振り返る」「見直す」過程において，擬変数を用いると考察の対象が明確になり，どの数がどういう意味で一般化・拡張に寄与しているかが顕在化しやすいことが学生のメタ認知部分の記述から裏付けられた。

１．問題の所在

(1) なぜ，擬変数を用いないのか？

擬変数とは，表現としては具体的な数字だが一般性を含意している数（数字）である。擬変数は数学史において「準一般的な方法」として登場する。(中村幸四郎，1963)筆者はこれまで，擬変数の価値を論じ，数字の式から文字の式に至る過程で擬変数が重要な役割を果たすと主張してきた。(拙稿　2006，2008，2017 等)ところが，擬変数の使用実態は極めて貧弱である。「マッチ棒の問題」(正方形が横に８こ並んでいるときの辺の数〈マッチ棒の本数〉を求める問題)では，

$$4+3\times(8-1)=25$$

など擬変数（正方形の数８）を用いた式表現は日・米・カタールの子どもにおいて，殆ど出現していない。分解式でも同様であり，

$$8-1=7 \quad 4+3\times7=25$$

などは殆ど出現していない。4 年生から 6 年生において，総合式と分解式を合わせても 1.71％しか出現していない。(拙稿 2018)

しかし，よくよく考えてみると，そもそも擬変数は，記号法の発達していない時代，文字式表現が未発達であった時代において，一般性を表現するための手段として使われた。すなわち，なんらかの命題(価値があると思われる)の発見が先ずあり，これを表現しようとして，擬変数が用いられた。擬変数は具体的な数として表現されているが，一般性を含意しており，そのために敢えて計算処理せずにその数を使い続け，一般性を訴えていたわけである。マッチ棒の問題を解くように促された小学４年生から６年生にとって，マッチ棒の問題の面白さや発展性，一般性を他の人にわかるように表現する必要はそもそもないのである。なぜなら，答えを得ることが目的であるからだ。このように考えると，1.71％とはいえ，正方形の数が 8 でない場合でも使える，一般性を含意した式を書いた子どもは卓越していよう。そして，擬変数を使用しなかった他の多くの子どもの実態を嘆くことは筋違いであろう。

(2)擬変数は使えるようになるか？

では，どのようにしたら，子ども達は今まで以上に擬変数の役割と機能を感得し，擬変数を使えるようになるだろうか？

筆者が考えたことは，擬変数の良さが分かる問題を与え，子ども達は解決過程と結果を振り返りながら，擬変数の良さを感得していく経験を積むことである。

だが，これだけでは不十分である。問題が常に他から与えられ，そこから出発するからである。そうではなくて，擬変数を用いて自ら命題を発見する過程を経験することも大事である。擬変数を用いて，記号法の未発達であった時代の探究活動を追体験するわけである。だが，今は，文字を用いた式は知られており，全く同じ状況ではない。

では，今日において，一般性を志向した探究活動は，どのように展開すべきか。擬変数を用いた式と文字を用いた式をどのように連携させ，探究活動を展開すべきであろうか。

この問いへの第一歩として，本稿では，規範的考察ではなく，探究活動の実際を特徴付けることを試みる。文字は既知であるが，擬変数の機能とよさを知り，その活用を志向するとき，どのような振舞いとなるか。その様相を学部3年生（数学科，27名）の授業での課題レポートを分析することで示したい。

学部3年生（数学科）は所謂アーティキュレイト・ノービスという位置付けである。擬変数を用い，一般化を志向する自分の探究過程をメタ認知し，それを明確に言語化（アーティキュレイト)する役割である。学生には，ノートを垂直方向に二分し,左側に探究過程，右側にメタ認知したことを記述するよう指示した。また,「擬変数」「式に表す」「式をよむ」「式の形式的処理」を鍵用語としてメタ認知の記述に組み込むことを指示した。これらの用語は，本時の前に2時間費やして学習している。

2．課題レポート前の授業

授業（学部数学科3年生）では，第一時間目に，擬変数の良さが感得できると期待できる問題を出題した。具体的には，図1に示す円Oの半径(直径)を求める問題である。円周上に点Pがあり，CDは接線。ABは直径でAC，BDも接線である。半径$r^2=16\times25$となり積一定の事象である。

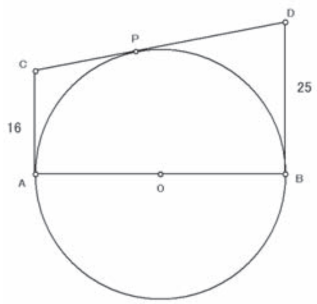

図1　積一定の事象

この問題は中学校3年の数学教科書に掲載されている問題であり，全員が正答したが，16と25を擬変数として扱っている人は皆無であった。16+25は41，25－16は9とし，41や9を用いて計算している。その結果，16と25が擬変数として振舞うことがまったく顕在化されていない。

二時間目では，16と25を意図的に計算しないで，使い続けることを促し，各自が自分の解法を再度擬変数の視点から書き直す作業をおこなった。また，この問題の解法が学生から5通り出たので，それらについても，擬変数で表し，処理する（敢えて計算しない）ことを行った。その結果，積一定であること

の面白さや擬変数の役割が感得され，授業後の感想などにも明確に表れた。そこで，いよいよ三時間目の授業では,擬変数を活用した,命題の発見活動へと移行した。

３．課題レポートで扱った問題

課題レポートでは，ディオファントスの数論に出てくる「二つの整数のおのおのが二つの平方数の和であるならば，それらの積は，二つの仕方で二つの平方数に分解できる」（T.L ヒース 1960）を用いた。この問題は三輪辰郎（1996）も「文字式の指導序説」の中で取り上げている。

出発点である具体的な数をどう示すかは，一般化を方向付けるので，十分注意が必要である。授業では，まず次の事実を示した。

$$(2^2+1)(3^2+1)=5\cdot10=50$$

$$(3^2+1)(4^2+1)=10\cdot17=170$$

導入はここまでにして,各自の探究活動(自力解決）へと進めることも可能であるが，そうしなかった。実は，現場の先生方を対象にしたある講習会で，この数パターンを探究しようということになった時，参加者が一斉に文字式で表現し，黙々とその計算を開始して驚いたことがあったからである。少なくとも右辺の構成の仕方を特定してから文字式に移行した方が見通しをもって文字式を使用できる。しかも右辺に現れる 7^2 や 13^2 の構成の仕方は一意ではないから，一般化の方向性をある程度示しておいた方が良いとの判断もある。そこで，7 は 2 と 3 を構成要素として表現すると 2×3+１であり，13 は 3×4＋１であることを確認した。2と3は擬変数である。授業で示した板書を具体的に一部示すと，

$$\begin{aligned}&(2^2+1)(3^2+1)\\ =\ &5\cdot10\\ =\ &50\\ =\ &49+1\\ =\ &7^2+1\\ =\ &(2\times3+1)^2+1\end{aligned}$$

となる。上から下へ一気に示さず，50 がどう見えるか？49+1 はどう見えるか？7 はどのように構成したらいいか？と問いかけながら順に示した。そして,自力解決へと移行した。自力解決はレポートとして提出させた。

以下では，自力解決の結果を示し，擬変数の役割と機能の視点から考察する。

４．解決の過程・結果の分析と考察

(1)解答の類型

一般性を志向する課題であるから，当然，個々の数をどう見るかで方向が分かれる。

具体的に$(2^2+1)(3^2+1)$について言えば，2 と 3 を連続した数と見るか，見ないかという観点がある。また，+1 を定数とみるか，これを任意の数と見るかの観点がある。任意の数の場合，2^2 に足す数と 3^2 に足す数を同じと見るか，異なっても構わないと見るかで，一般化の様相も異なることになるが，大枠では 4 類型である。本稿では次の 4 つを類型とする。

類型 1：連続する数，+1 は定数

類型 2：連続する数，+p(任意の数)

類型 3：非連続数，+1 は定数

類型 4：非連続数，+p +q(任意の数)

(2)学生の探究活動とその分析・考察

1）類型 1：8 名

最後まで,文字式を用いない人が 2 名いた。1 名は課題提示の際に用いられた数値だけを吟味し確認しただけであった。もう 1 名は 2 と 3，3 と 4 を擬変数とみて，これらの代わ

りに，3/2，－5/4，$\sqrt{5}$，－$\sqrt{3}$，そして 1+i を用いて等式が成り立つことを確認している。

6名が文字を用い，その内3名が $(n^2+1)((n+1)^2+1)=(n(n+1)+1)^2+1$ を示している。他の3名は，$(n^2+1)(m^2+1)$と表現し，右辺を$(nm+1)^2+1$ としているが，あくまで $n+1=m$ の場合に成り立つとしている。具体的に示された数を命題「連続する2つの整数についてそれぞれの平方に1を足したものの積は,また,整数の平方に1を足した数になる」と捉え，それを文字式で証明している。

具体的に示された数字の式を，素直に文字の式に表現し,成り立つことを証明している。しかし，その後の発展はまったく構想していない。もちろん,式の形としてもきれいだし，平方数+1の集合は，(2^2+1) と (3^2+1) のように連続した数の場合は，乗法に関して閉じているとみることができ，ここで探究活動を停止することも納得はできるが，正直，物足りなさを感じる。この類型の人数は27名中8名なので30%である。現行の文字式の指導が，ただ文字式で表現し，証明して終わるだけの指導となっているのではないか。だからそのことがこの結果に反映されているのではないか。気になるところである。

2）類型2：3名

連続した数を維持し,+1の方を任意の数とする類型である。3名とも様相は異なる。

S_aは+1を+pとして，$(n^2+p)((n+1)^2+p)=(n(n+1)+p)^2+p$ と文字式で証明している。S_bは数字式のままであるが，$(2^2+7)(3^2+7)=(2\times3+7)^2+7(3-2)$と表している。先の$S_a$は，pの係数を$\{n-(n+1)\}^2$と途中では表現しているが，最終的には，pとだけ記し「最終的な結論」と明記している。

では，S_bは$7(3-2)$にどのようにして気が付いたのか。先ずS_bは，$(2^2+1)(3^2+1)=(2\times3+1)^2+1$ の右辺左辺を別々に展開し，比較している。

左辺は $2^2\times3^2+2^2+3^2+1$

右辺は $2^2\times3^2+2\times2\times3+1+1$

異なる部分を比較して $2^2+3^2=2\times2\times3+1$ から $3^2-2\times2\times3+2^2=1$　$(3-2)^2=1$ とし，「2 と 3 を擬変数として使い続けると $(2^2+1)(3^2+1)=(2\times3+1)^2+1$ が成り立つ理由が$(3-2)^2=1$という関係にあるからだと分かった」と書いている。だが，最初は，「$\{2\times3+(3-2)\}^2+1$ だと予想していた」という。それが$(2\times3+1)^2+(3-2)^2$となったので,「自分の予想しない部分に$+(3-2)^2$が表れた」と書いている。そして，+1 の代わりに+7 として，$(2^2+7)(3^2+7)=(2\times3+7)^2+7(3-2)$を得ている。最終的に「2，3，7を擬変数としてよむと 2，3，7 に任意の整数を代入しても成り立つことがわかる」と書いている。

S_bの活動全体を振り返ると，数字の式に徹し，擬変数を敢えて計算しないで使い続けることを意識的に行っていることがわかる。

S_bの思考過程，着眼点を振り返ると，+1を定数とみるか，他の数で構成できる数とみるかで，展開が大きく変容している。本人も最後の感想を次のように書いている。

「ひとつの数を擬変数とするか定数とするかで式の表し方，よみかたが変わっていくのが面白いと思った。擬変数は，具体的な数を用いて表すため，変域を定めることが難しいと思った」と述べている。記号法が未発達であった時代において，一般性を見出す過程とその結果を擬変数を用いてどう表現していたのかを彷彿させる記述である。

さて，このグループの 3 人目の S_c は，+1 の部分を+2，+3 と探究し，また，減法でも成り立つことを確認している。その後二乗ではなく三乗の式に挑戦するが断念する。ところが，その次の段階で左辺の+1，+2 などを$+1^2$，$+2^2$ とし，平方数を足すことを突然始める。何がその契機となったかは，よくわからない。また，右辺を構成する仕方が必ずしも一定ではないことから類型 2 とした。

3）類型 3：11 名

連続した数という限定を外すが，+1 は定数とする類型である。文字式で表現すると $(n^2+1)(m^2+1)=(nm+1)^2+(n-m)^2$ となる。

この類型 11 名のうち 2 名は，上記の左辺を$(nm+1)^2+1$ と思い，S_d は数字の式で探究し，$(2^2+1)(5^2+1)$について「今までの過程では$(2\times5+1)^2+1$ となるはずである。しかし，計算すると$(2^2+1)(5^2+1)\neq(2\times5+1)^2+1$ であることがわかる」としここで探究活動を終えている。S_e は文字式で$(a^2+1)(b^2+1)$と$(ab+1)^2+1$ をそれぞれ展開して比べ，右辺を$(a\times b+b-a)+1$ などとするが「どれもうまくいかない」と探究活動を終了している。

うまくいかなかった 2 名に共通するのは，+1 はあくまでも定数という見方であり，1 が他の数から構成されるとは見ていない。式の形をみても$(n^2+1)(m^2+1)=(nm+1)^2+1$ と表現すると平方数+1 が乗法に関して閉じているようにみえ(学生はそのように記述していないが)，そこでの+1 は重要な役割を担っているように見える。だから，+1 を崩したくないのであろう。

一方，断念せず探究を続けた人，例えば，S_fは最初の具体例に戻り，「+1 の捉え方を変えてみる」として，ここを切り抜けている。

S_g と S_h も同様に，最初の具体例に戻って見直している。S_hは$(4^2+1)(7^2+1)=\{4(4+3)+1\}^2+3^2$とし，「この式をよむと計算結果は{選んだ 2 数の積+1}²+(2 数の差)² と一般化できることがわかる」と述べ，その横のメタ認知の記述部分では「今まで+1 だった部分が$+3^2$に変わっているので，これまでの+1 は$+1^2$と捉えられる」と明言している。さらに最後の感想で S_h は

「発展の結果から，これまでただの+1 と捉えていた部分が$+1^2$，つまり(2 数の差)² とよめることがわかったように，発展や一般化を考えることによって逆算的に，最初の命題の本質を理解するきっかけになる場合があることに気づいた」

と記している。

S_hは一貫して数字の式，すなわち擬変数を用いて探究していた。「逆算的に」という表現で，振り返ることの重要性を明言している。振り返ることで，S_hは「最初の命題の本質を理解する」ことになった。換言すれば，具体的な数は多様な一般性を潜在的に持っているが，その中のある特性を見出すことの重要性を実感したと言えよう。

この類型の残りの人達は，文字式で表現し，例えば，S_i は$(n^2+1)(m^2+1)=(nm+1)^2+(n-m)^2$ を得ている。この人達に共通するのは，左辺の$(n-m)^2$ の部分について，文字式から予想している場合と，具体的な数から直観している場合とがあるが，いずれにしても，必ず，最初の式：$(2^2+1)(3^2+1)=7^2+1$ に戻り，+1 は$+1^2$とであると捉え直している点にある。

実際，初めは数字の式で探究した S_jは「条件を変えて試行を行って行くと，決まって平方数が出てくることに気付いた」「これらの事

実から+1 の捉え方を変えてみる，すなわち擬変数を使って表しなおす」とし$(2^2+1)(3^2+1)=(2\times3+1)^2+(2-3)^2$ を得ている。この後，文字式へと移行している。メタ認知では「必ずしも+1 にならないのではないかという視点で見れたことがよかった」と記している。

文字式で探究した S_k は「a と b の差が 2 のときは？」とし，$(a-b)^2=2^2$ と記している。これを $a^2+b^2=2^2+2ab$ とした後，$(a^2+1)(b^2+1)=a^2b^2+a^2+b^2+1$ の中にある a^2+b^2 を 2^2+2ab に置き換え，$(ab+1)^2+(a-b)^2$ と表現している。メタ認知の部分では「$(ab+1)^2+1$ の+1 は a と b の差の二乗ではないかと予想した」とあり，「そこで，前半で形式的処理を行った式を逆から解いてみる」「2 という数字を擬変数として用いて式に表すと a と b の差が 2 の時は $(ab+1)^2+2^2$ となることがわかった」とある。そして「そこから擬変数として扱った 2 を変数に変えることでより一般性が判明すると考えた」とあり，最終的に $(ab+1)^2+(a-b)^2$ を得ている。

この類型では 11 名中 9 名が+1 にならないというだけで終わるのではなく，最初の式に戻って+1 を $+1^2$ と見直している点が共通している。振り返り統合的にみることが発展の鍵となることを事実として示していよう。

4）類型 4：5 名

連続した数とはとらえず，さらに+1 も任意の数へと拡張する類型：この類型の 5 名の各自の特徴を捉えるために，最終的に得られる式を下記とする。

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

5 名のうち 3 名は，$(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ における b^2 と d^2 のところは，平方数ではなく，また，b=d，すなわち同じ数を用いている。S_l は数字の式：$(3^2+2)(7^2+2)$ や $(3^2+5)(7^2+5)$ で探究し，後者の右辺は $(3\times7+5)^2+5(7-3)$ としている。そして「OK!新たな命題を得る」として，$(a^2+c)(b^2+c)=(ab+c)^2+c(b-a)^2$ を示している。用いている文字は異なるが，他の 2 名も同様の結論であった。

一方，残る 2 名の内の一人である S_m は $b\neq d$ の場合，すなわち「$(2^2+1)(3^2+2)$ のように加える数が異なるときはどうなるのか」を考察している。そして，「$(2^2+1)(3^2+2)=(2\cdot3+1\cdot\sqrt{2})^2+(1\cdot3-2\cdot\sqrt{2})^2$ となり文字式で一般化すると，

$$(a^2+k)(b^2+\ell)=(a\cdot b+\sqrt{k}\sqrt{\ell})^2+(\sqrt{k}a-\sqrt{\ell}b)^2$$

となる」と述べている。最後に，「ここまでの計算過程を考えると，式の形式的処理の方法はどれも同じであることがわかる」とし，これが最終的な結論であるとしている。

最後の一人である S_n は，$(2^2+1)(3^2+1)$ と $(3^2+1)(4^2+1)$ を検討した後，直ちに，「$(x+\square)(y+\triangle)$ の形で一般化したかったので，手始めに $\square=2$，$\triangle=1$ としてみた」とし，$(3^2+2)(4^2+1)$ を検討する。しかし，$3^2\times4^2+3^2\times1+4^2\times2+2\times1$ と展開しただけで行き詰る。だが，これを乗り越え，メタ認知の部分では次のように記している。

「この式から先に進まなかったが，2×1 を $(\sqrt{2})^2$ とみることで，平方完成ができた。自然数から無理数まで思考範囲を広げることが，ブレイクスルーとなった」と書いている。

そして，S_n は右辺を構成する数について，下のように書いている。

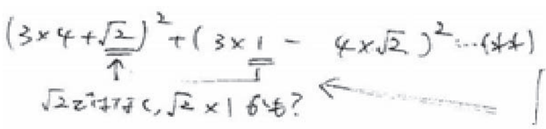

図 2　√2 は√2×1

「√2 ではなく，√2×1 かも？」のところの矢印に繋がるメタ認知部分では，以前の $(3^2+1)(4^2+1)$ に戻っている。$(3\times4+1\times1)^2+(3-4)^2$ の $(3-4)^2$ の部分を $(3\times1-4\times1)^2$ とし「このように見るのが正しいように思えた」と記している。

その次に $(3^2+2)(4^2+5)$ を検討し，

$$(3\times4+\sqrt{2}\times\sqrt{5})^2+(3\times\sqrt{5}-4\times\sqrt{2})^2 \quad (***)$$

を得ている。

メタの認知の記述は，以下である。

「2×5 の行先や変わり方に注意して式変形をした。つまり，2 や 5 を文字と同じようにみて形式的に式変形することで，予想どおりの結果を得た。左の計算では，2，3，4，5 を擬変数とみて計算しており，一般の自然数について(***)と同じことがいえる。すなわち，$\forall x, y$, $a, b \in N$ に対して次の式が成立する。

$$(x^2+a)(y^2+b)=(x\cdot y+\sqrt{a}\sqrt{b})^2+(x\sqrt{a}-y\sqrt{b})^2$$

となる」

この段階では，平方数に自然数を足したもの同士をかけており，先の Sm と同じである。ところが，さらに振り返ることで，図 3 に示すように平方数の和という見方がでる。実際，「式に表した後で，もう一度元の式をよむことで，より本質的な見方ができる」と明記している。

$(3^2+2)(4^2+5)=(3\times4+\sqrt{2\times5})^2+(3\times\sqrt{5}-4\times\sqrt{2})^2$
だったが，そうすると，$(3^2+2)(4^2+5)$ ではなく
$(3^2+\sqrt{2}^2)(4^2+\sqrt{5}^2)$ とみるのが良い式の
見方だろう。式に表した後で，もう一度元の
式をよむことで，より本質的な見方ができる。

図 3　2 は√2 の二乗，5 は√5 の二乗

Sn はこの見方で $(3^2+2^2)(4^2+5^2)$ が $(3\times4+2\times5)^2+(3\times5-4\times2)^2$ となるか確かめ，「実際に予想が確かめられた」としている。最後に，得られた命題を文字式で表現している。

ここでの 2，3，4，5 は擬変数であり，自然数
である必要もない。一般に $\forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$ で
$(x^2+a^2)(y^2+b^2)=(xy+ab)^2+(bx-ay)^2$
が成り立つ。-----(☆)

図 4　命題を文字式で表現

この後，減法についても確認し，最後に次のように書いている。

「* 2 乗数の和の積は，2 乗数の和になる。

→ 2 乗数の和は，乗法で閉じている。

** 2 乗数の差の積は，2 乗数の差になる。

→ 2 乗数の差は，乗法で閉じている」

このような見方ができたのは，1 名であった。Sn はこの後，三平方の定理やシュワルツの不等式へ言及している。

5．擬変数を用いた発見の過程

(1) 振り返ることが一般化の契機

27 の回答（学部 3 年による）は 4 類型に分類できた。換言すれば，それぞれの類型は探究の終着点，一般化の到達点といえる。

類型 1 から類型 4 に行くにしたがって，一般化はより一層進むが，回答を分析して判明したことは，鍵となった活動は「振り返る」という活動であったということである。

例えば，類型 1 から類型 3 へ進んだ S_h は，メタ認知部分で「逆算的に，最初の命題の本質を理解する」という印象的な表現を書いていた。実際，S_h は $(4^2+1)(7^2+1)=\{4(4+3)+1\}^2+3^2$ を得る際に，$(2^2+1)(3^2+1)$ に戻り「擬変数を 2 のみに絞って式変形する」とし「連続した数 2，(2+1)や 3，(3+1)の計算過程で，+1 の部分がどう計算されているかに注目すれば，無関係な 2 数での結果を調べることができる

のでは？と考えた」と書き，振り返る場所と振り返る目的を明言している。

同じ類型1から類型3に至り，最後は文字式で表現していたSjは，数字の式では連続する数でない場合として$(2^2+1)(4^2+1)$を考えたが，平方数+1とならないことで行き詰まる。そこで，+1を見直し，+1を$(2-3)^2$ととらえて，一般化している。この過程を図示すると図5のようになろう。

$$(2^2+1)(3^2+1)$$
$$=(2\times3+1)^2+1$$
$$=(2\times3+1)^2+(2-3)^2$$

$$(2^2+1)(4^2+1)$$
$$=9^2+1 \quad \text{行き詰る}$$

$$(m^2+1)(n^2+1)$$
$$=(m\times n+1)^2+(m-n)^2$$

図5　振り返る過程

行き詰まったとき，それまでの探求活動を振り返ることが，発展への契機となる。そこでの振り返りは，図5のように直線的なイメージだが，これでは質的な変化が見えにくい。振り返る過程をもう少し掘り下げて考えてみよう。

(2) 発展は統合的発展

「振り返る」のは,行き詰ったときである。行き詰まったとき，先に進もうとするのではなく，立ち止まり，今までの探究活動の過程と内容を振り返るのである。そうすることで，今までの内容を含んだ発展が得られる。そこでの発展はまさに統合的発展である。

中島健三（1981）は「統合」について，三つ，すなわちa集合による統合，b拡張による統合，c補完による統合を挙げている。本稿での「統合」の意味は,「b拡張による統合」である。「拡張による統合」を顕在化させるために，$(2^2+1)(3^2+1)$の+1に特化して，ごく単純に図示すると，下図のようになろう。

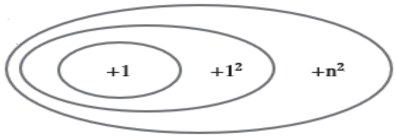

図6　拡張による統合

「拡張」という言葉を中島健三(1981)は用いているが，具体的な数において，何らかの数の性質や関係を見出し，それを文字式で証明する過程は，ふつう，一般化の過程と言われる。だが，中島健三(1981)は「一般化(generalization)も拡張(extension)も，はじめにあった概念または形式について，その適用範囲が広くなるようにすることである。(中略)別に区別しないで用いることも多い」(p.136)としている。中島健三(1981)はさらに，「もとの概念Aで構成される集合は，新しく拡張された概念Bの集合にその部分集合として含まれるのではなく，形式的には，集合Bの中に集合Aと同型な部分集合A'を含むという形になっている」と述べ，その構造を図7のように示している。(p.144)(下線は本稿著者)

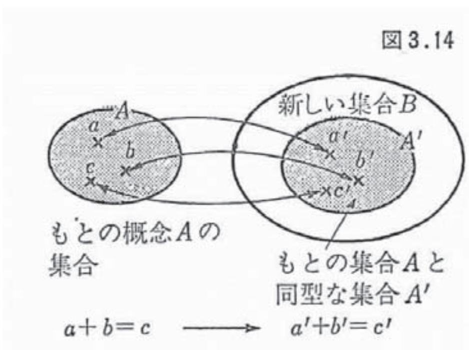

図7　拡張による統合の構造(中島健三1981)

一般化と拡張を同等に見ることで，本稿での一般化の過程も，拡張による統合として特徴付けることができよう。

このように見ると$(2^2+1)(3^2+1)$の+1，そして

+2，+3 などは，次のようになろう。

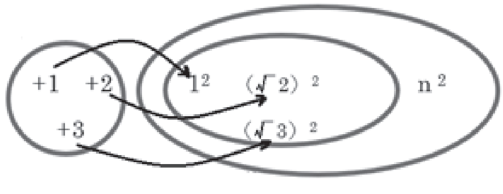

図 8　拡張による統合の構造

S_n は 2 を$(\sqrt{2})^2$ とみることで「平方完成ができた」「ブレイクスルーとなった」と書いていたが，本稿の課題では，まさに，+1 を$+1^2$，2 などを$(\sqrt{2})^2$ などと「見直す」ことが，拡張による統合への鍵であった。中島健三(1981)が言う「部分集合として含まれるのではなく」の意味は，一般化・拡張を志向した本課題の探究活動においては,2 をそのまま 2 と見るのではなく，$(\sqrt{2})^2$ と「見直す」ところに端的に具現化していよう。そこでは 2 を擬変数として使い続けていたからこそ，2 を$(\sqrt{2})^2$ と「見直す」ことができたと思われる。

課題レポートでは，出発は 2^2+1 のように平方数+1 だったが，平方数+整数から最終的には平方数+平方数となった。これを表現すると下図となろう。

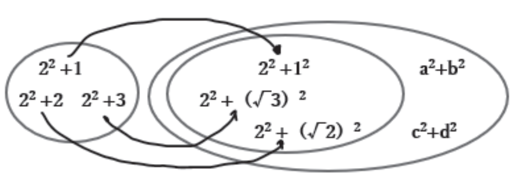

図 9　拡張による統合の構造（平方数の和）

このように捉えると，擬変数は独立的ではなく，式を構成する要素と見た方が良い。先の図 5 において，$(2^2+1)(4^2+1)$が 9^2+1 とならずに行き詰まり，その時+1 を見直したが，同時に，+1 は平方数+1 という式を構成する要素であり，平方数+1 から平方数+平方数へと式自体を見直したと捉えるのである。式に着目する理由は，式の背後には考察の対象となっている事象があり，事象の特徴が事象を構成する要素とその関係として式で表現されているからである。

今回の課題では，集合がある演算に関して閉じているか否かの視点での探究は殆ど行われていないが，演算が閉じるように集合を拡張しようとすると，演算とその対象に焦点が当たるので，式の構成要素としての擬変数の役割と機能が一層顕在化したであろう。

６．結論と今後の課題

本稿で得た結論は２つである。

第一に，一般化・拡張を志向した命題の発見過程では，探究の過程及び内容を「振り返ること」が重要である。さらに，それだけでは不十分であり，2 を$(\sqrt{2})^2$ と捉えたように，そこでの意味や表現形式を新しい概念(集合)の視点で「見直す」ことが大事である。「見直す」ことで統合的発展への扉が開かれるからである。

第二の結論は，「振り返る」「見直す」過程において，擬変数が重要な役割を担うということである。意図的に擬変数を用いることで，考察の対象が明確になり，その結果，どの数がどういう意味で一般化・拡張に寄与しているかが，顕在化しやすいからである。このことは，学生のメタ認知部分の記述が裏付けている。

指導上の問題として，中島健三(1981)は，数を拡張する場面において「それまでに『数』として考えたものについて，どんな面を取り上げて，新しく『数』としてとらえているか，その表し方はどうか，といった点について，一応の反省を加えることが重要である」「こう

した点が，実際の指導の場では，明確にされないままになっていることが多い」と述べている。(p.145)擬変数を意図的に用いると，考察の対象が明確になり,「一応の反省を加える」際の一助となろう。

なお，原題「二つの整数のおのおのが二つの平方数の和であるならば，それらの積は，二つの仕方で二つの平方数に分解できる」における「二つの仕方」については，誰も触れなかった。「二つの仕方」とは，

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2$$

であり，先の$(3^2+2^2)(4^2+5^2)$について，具体的に示すと，

$(3\times4+2\times5)^2+(3\times5-4\times2)^2=22^2+7^2$ $(=533)$
$(3\times4-2\times5)^2+(3\times5+4\times2)^2=2^2+23^2$ $(=533)$

である。最後にもう一度具体的な数に戻ると，この課題の面白さが際立ったに違いない。

このように「二つの仕方」を視野に入れると，最初に示す具体的数のパターンや右辺の構成を示すか否かなど，それなりの工夫あるいは再考が必要となろう。また, +1 だけではなく，最初に，$(2^2+1)(3^2+1)$と共に$(3^2+4)(4^2+4)$を示すと，4 は 2^2であることから類型 4 への道のりも容易となろう。これらの吟味は今後の課題とする。

また，数人の学生が擬変数の選択には注意が必要であることを明記している。例えば,「$(a+b)^2$を展開すると 2 がでてくるので, 2 は避けた方がいい」及び「1 を定数としてみていたが，擬変数としてみるとどうなるか考えてみたいと思った。1, 2, 3, 4(=2^2), 5(=2+3), 6(=2×3)だと擬変数が 3 つであることを意識しにくいため,擬変数 7 を導入した」である。確かに一般化を志向した探究活動では，節目節目で擬変数の選択自体が問題となろう。この視点からの考察も今後の課題とする。

引用・参考文献

藤井斉亮& Stephens, M. (2006). 「初等教育段階における代数的思考の育成: 擬変数の理解に焦点を当てて」(C.[数と計算・代数], 論文発表の部). 数学教育論文発表会論文集，39，pp.307-312.

Fujii, T. & Stephens, M. (2008). Using Number Sentences to Introduce the Idea of Variable. Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, Seventeenth Yearbook pp.127-140.

藤井斉亮 (2017)「擬変数の役割と機能及びその理解の様相について」『数学教育学の礎と創造』所収，東洋館出版社，pp.22-32

藤井斉亮，成田慎之介，清野辰彦 (2018)「数学的問題解決における日米共通調査再考 –「マッチ棒の問題」の解決における式表現と擬変数に焦点を当てて–」日本数学教育学会誌 100 10 pp.2 -15

T.L ヒース (1960)『ギリシャ数学史』共立出版，p.407

中島健三 (1981)『算数・数学教育と数学的な考え方－その進展のために』金子書房

中村幸四郎(1981)『数学史―形成の立場から―』共立全書 236

(ふじい　としあきら
所属先　東京学芸大学
所在地　東京都小金井市貫井北町 4-1-1)