Title	漸化式と微分方程式 : 高大接続を視野に(fulltext)
Author(s)	荻原,洋介
Citation	研究紀要 / 東京学芸大学附属高等学校(58): 25-30
Issue Date	2021-03-01
URL	http://hdl.handle.net/2309/166745
Publisher	東京学芸大学附属高等学校
Rights	

東京学芸大学附属高等学校紀要　58　pp.25～30，2020

漸化式と微分方程式

－高大接続を視野に－

Recurrence relation and Differential equation

－ Taking ‘Relations Between High Schools and Colleges’ into consideration －

数学科　荻原　洋介

＜要旨＞

通常，高校２年生で学習することになる漸化式は初学者が苦手とするところである．

微分方程式と漸化式は‘差分方程式’の一部である．前者が連続的差分方程式ということにすれば，後者は離散的差分方程式ということができるだろう．

発展事項にわずかに残るが，高等学校のカリキュラムから微分方程式が表立ってなくなって25年ほど経つが，漸化式の考え方や教え方に微分方程式を視野に入れることで，高大の接続ができるところもあるはずである．

このことを，微分方程式の解法と比較して，self-contained を原則に述べる．

＜キーワード＞　漸化式，微分方程式，固有値，固有ベクトル，線型代数学

1　数列の基本

例えば，適当な境界条件が与えられれば，隣接二項間漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ などが解けることはよく知られている．

しかし，$a_{n+1}=2\sin a_n+n$ のような形になると解くことは困難になる．つまり，一般に漸化式を解くことは難しい．

これは微分方程式についても同様で，具体的に解けるものは種類として少なく，専門的には抽象的な解の存在と一意性について論じたり，そのために適切な関数空間を考えることになる．

さて，高等学校で扱う‘解ける’漸化式についてはいくつかの方法があるが，その代表の１つが，等比数列型に帰着させるものである．

等比数列についての特徴を見直すことから始める．

$a_1\neq 0$，$r\neq 0$ として，$a_n=a_1r^{n-1}$ とする．

階差を考えると，

$$a_{n+1}-a_n=a_1r^{n-1}(r-1)$$

で，$r-1$ 倍だけのずれはあるが，等比数列の骨格をなす a_1r^{n-1} は形が変わらずに残っている．

冒頭にも述べたように，漸化式を離散的‘微分’と見れば，この操作は関数 $f(x)$ に対して $f'(x)$ を考えることに対応しており，数列の世界の微分に相当するものと解釈できる．

微分の場合には，連続的に $h\to 0$ とすることができるが，数列の場合には離散的であるから，連続的に $h\to 0$ ではなく，離散的に１つ隣までしか近づけられない．

いずれにしても，小学生が規則性の問題で差を考えることも，広くは微分につながる自然な着眼であるといえる．以下でもこの考えを基軸に利用することとなる．

さて，$r=2$ とすると

$$a_{n+1}-a_n=a_1r^{n-1}$$

である．

このことは，$a>0,\ a\neq 1$ である指数関数の微分 $(a^x)'=a^x\log a$，特に $a=e$ のときの $(e^x)'=e^x$ に対応する．

さて，$r\neq 0$ として

$$a_{n+1}=ra_n,\ a_{n+2}=ra_{n+1}$$

を辺ごとに差を取ると，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくことで，

$$b_{n+1}=rb_n$$

と，同様の漸化式を得ることになる．すなわち階差をとっても不変である．

これは，微分方程式に対しては

$$f'(x)=Af(x)\ (A\neq 0)$$

に相当することになる．

等比数列の漸化式は，その階差を表す漸化式が形として不変であることが必要条件であることがわかった．

次の節からは具体的に漸化式と微分方程式がどのように関連づけられるのかを見ていくことにする．

なお，以下では紙面の関係もあり，誤解のない範囲では文字等に細かい断りはしないことにする．

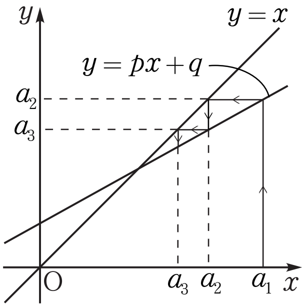
2　各漸化式について

2－1　隣接二項間漸化式について

2－1－1　特性方程式について

$a_{n+1}=pa_n+q\ (p\neq 1)$ について扱うが，ここではいわゆる特性方程式 $\alpha=p\alpha+q$ について考察する．

$y=px+q$ と $y=x$ を考える．



図のようにして極限値を考えることなどは数学 III ではよく知られているが，発散するタイプの漸化式 $a_{n+1}=2a_n+1,\ a_1=1$ などでも特性方程式を利用することはできるから，$y=px+q$ と $y=x$ の交点として α を特徴づけるのは不適切である．

これは，$a_{n+1}=pa_n+q$ の基本になる $a_{n+1}=pa_n$ との関係を考える方が適切で，それは $y=px$ を平行移動して $y=px+q$ をとらえることになる．

ただし，平行移動は通常の y 軸方向へのものではなく，

$$y-\frac{q}{1-p}=p\left(x-\frac{q}{1-p}\right)$$

として，$X=x-\dfrac{q}{1-p}$，$Y=y-\dfrac{q}{1-p}$ とおくときの，xy 座標系を XY 座標系に変換したと考えている．すなわち，x 軸方向と y 軸方向に等しく平行移動させることで，旧座標系の原点と新座標系の原点を対応させるようにしている．

つまり，$a_{n+1}=pa_n+q$ を適当に変換して，等比数列 $a_{n+1}'=pa_n'$ に帰着させているのである．

隣接三項間漸化式（およびそれ以上）の特性方程式とは異なり，不動点がキーワードになる．

この周辺については後述する．

2－1－2　微分方程式との関係

微分方程式で対応させてみよう．

$$P(x)=\int p(x)\,dx$$

とする．

さて，$a_{n+1}=pa_n+q$ に対応する微分方程式

$$y'=p(x)y+q(x)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

について，まず $y'=p(x)y$ を考える．

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y$$

$$\frac{1}{y}dy=p(x)dx$$

$$\log y=P(x)+C\qquad\therefore\quad y=e^Ce^{P(x)}$$

C は積分定数とする．

ここから ① の解を

$$y=C(x)e^{P(x)}$$

として，

$$y'=\{C'(x)+p(x)C(x)\}e^{P(x)}$$

$$=p(x)y+C'(x)e^{P(x)}$$

となり，

$$C'(x)e^{P(x)}=q(x)$$

となるように $C(x)$ を定めることとなり，

$$C(x)=\int\left\{e^{-P(x)}q(x)\right\}dx$$

となる．以上が 1 階常微分方程式に対する定数変化法と呼ばれるものの概略である．

$a_{n+1}=pa_n+q$ も $a_{n+1}=pa_n$ から始めれば

$$a_n=a_1p^{n-1}$$

を変化させて，

$$a_1p^n+\alpha=p(a_1p^{n-1}+\alpha)+q$$

とすることで，$\alpha=p\alpha+q$ を得る．

基本となる解に似たような形から始めるという点で，隣接二項間漸化式の特性方程式は定数変化法に対応すると考えることができる．

2－1－3　解の一意性

$a_{n+1}=pa_n+q$ の解の存在は，初期値 a_1 が与えられれば定まることがわかった．ここで，抽象的に解の一意性を示してみよう．

漸化式の解が，$a_n = f(n), g(n)$ であるとする．

$$f(n+1) = pf(n) + q$$

$$g(n+1) = pg(n) + q$$

を満たし，これを辺ごとに引くと

$$f(n+1) - g(n+1) = p\{f(n) - g(n)\}$$

より

$$f(n) - g(n) = p^{n-1}\{f(1) - g(1)\} = 0$$

であるから，$f(n) = g(n)$ である．

この証明は，1 階常微分方程式の解の存在と一意生を証明するときに用いる Lipschitz 連続を利用していることに相当する．その証明の紹介は多少長いため，高橋 [2]，吉田 [5] に譲ることにする．

2－2　隣接三項間漸化式について

2－2－1　特性方程式について

以下では式番号を ① から振り直す．

$p \neq 0$，$q \neq 0$ とする．

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1}$$

を辺ごとに引いて，$a_{n+1} - a_n = b_n$ とおくと，

$$b_{n+2} = pb_{n+1} + qb_n$$

となり，形が不変であるため，第 1 節で述べたように必要条件として $a_{n+1} = ra_n \ (r \neq 0)$ とおくことで，① に代入すると

$$r^2 a_n = pra_n + qa_n$$

$$(r^2 - pr - q)a_n = 0$$

一般に $a_n \neq 0$ であるから，

$$r^2 - pr - q = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

となり，特性方程式が得られる．

（1） ② が異なる 2 つの実数解をもつとき

$r = \alpha, \beta$ とする．

$$\alpha^{n+2} - p\alpha^{n+1} - q\alpha^n$$

$$= \alpha^n(\alpha^2 - p\alpha - q) = 0$$

であるから，$a_n = \alpha^n$ は ① を満たす．

全く同様にして，$a_n = \beta^n$ は ① を満たす．

重ね合わせの原理を用いて

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

が ① の解になる．

実際

$$a_{n+2} - pa_{n+1} - qa_n$$

$$= A(\alpha^{n+2} - p\alpha^{n+1} - q\alpha^n)$$

$$+B(\beta^{n+2} - p\beta^{n+1} - q\beta^n) = 0$$

である．

ここで，$f(n)$，$g(n)$ がそれぞれ ① を満たすとする．

$$f(n+2) - pf(n+1) - qf(n) = 0$$

$$g(n+2) - pg(n+1) - qg(n) = 0$$

を辺ごとに引いて，$h(n) = f(n) - g(n)$ とすると

$$h(n+2) - ph(n+1) - qh(n) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

さらに，境界条件 $f(1) = g(1)$，$f(2) = g(2)$ より，$h(1) = 0$，$h(2) = 0$ であるから，③ に代入して，帰納的に $h(n) = 0$ が成り立つから，$f(n) = g(n)$ となり，解の一意性が示された．

すなわち，隣接三項間漸化式 ① は $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ という一意解をもつことが示された．

高等学校で難しいのは，隣接二項間漸化式の‘‘特性方程式’’がもつ意味と，隣接三項間漸化式がもつ意味が異なることの説明がしにくいところである．

先にも述べたように，特性方程式については後でまとめて触れることにする．

さて，α，β は ② の解であったから，解と係数の関係を用いて

$$\alpha + \beta = p, \alpha\beta = -q$$

であるから，① は

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

となり

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

または

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

と変形できる．

以上は必要条件として，$a_{n+1}=ra_n$ になることから始めて解を構成し，なおかつ一意性も示したことにより十分条件を求めた．

つまり，等比数列を基軸にすると，指導の際に天下りになってしまう特性方程式が比較的自然な形で展開できる．

（２） ② が重解をもつとき

その重解を α とすると，α^n は ① を満たすが，境界条件が２つあることや，（１）のときから推論すると，α^n 以外にも，（定数倍を除く）解がないといけない．

素朴に考えてみよう．② が重解をもつから，① は

$$a_{n+2}-2pa_{n+1}+p^2a_n=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

の形であるから，$\alpha=p$ である．

（１）で $\alpha=p$，$\beta=p$ として，④ は

$$a_{n+2}-pa_{n+1}=p(a_{n+1}-pa_n)$$

で，数列 $\{a_{n+1}-pa_n\}$ は等比数列であるから，

$$a_{n+1}-pa_{n+1}=p^{n-1}(a_2-pa_1)$$

となり，$c=a_2-pa_1$ とおくと

$$a_{n+1}=pa_n+cp^{n-1}$$

両辺 p^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{c}{p^2}$$

とし，これから

$$\frac{a_n}{p^n}=\frac{a_1}{p}+\frac{c}{p^2}(n-1)$$

を得るのは，よく知られている．

したがって

$$a_n=a_1p^{n-1}+c(n-1)p^{n-2}$$

$$=\left(\frac{a_1}{p}-\frac{c}{p^2}\right)p^n+\frac{c}{p^2}np^n$$

となり，$a_n=Ap^n+Bnp^n$ の形が得られた．

ここで，$a_n=np^n$ として ④ に代入すると

$$(n+2)p^{n+2}-2(n+1)p^{n+2}+np^{n+2}$$

$$=p^{n+2}\{(n+2)-2(n+1)+n\}=0$$

であるから成り立つ．

$p=\alpha$ であるから，④ の解は，α^n と $n\alpha^n$ を基本として，重ね合わせの原理から，$a_n=A\alpha^n+Bn\alpha^n$ となることが分かり，解の一意性は（１）と同様に示すことができる．

（３） 以上の内容を微分方程式に対応させてみよう．

$$y''-py'-qy=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

についても，$y=e^{tx}$ として

$$(t^2-pt-q)e^{tx}=0$$

から，特性方程式 $t^2-pt-q=0$ が導入される．

異なる２つの実数解 α，β をもつとすると $\{e^{\alpha x}, e^{\beta x}\}$ が ⑤ の基本解系で，一般解が $y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$ となり，境界条件 $y(0)$，$y'(0)$ によって一意解となる．

漸化式では $\{\alpha^n, \beta^n\}$ で，微分方程式では $\{e^{\alpha x}, e^{\beta x}\}$ という対応になる．

次に

$$y''-2py'+p^2y=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

については，特性方程式が

$$t^2-pt+p^2=0$$

であるから，重解 $t=p$ をもつ．

このとき，⑥ の基本解系は $\{e^{px}, xe^{px}\}$ となるが，これについて補足する．

$y=e^{px}$ はそうなるように必要条件から定めたため容易に分かるが，ここで $y=z(x)p^{px}$ としてみる．以下では $z(x)=z$ と略記する．

$$y'=z'e^{px}+pze^{px}$$

$$y''=z''e^{px}+2pz'e^{px}+p^2ze^{px}$$

であるから，⑥ に代入して

$$y''-2py'+p^2y$$

$$=\{(z''+2pz'+p^2z)$$

$$-2p(z'+pz)+p^2z\}e^{px}$$

$$=z''p^{px}$$

したがって $z''(x)=0$ のとき $y=z(x)e^{px}$ は ⑥ の解で，これを満たすものの１つとして $z(x)=x$ とすることで，$y=xe^{px}$ を得る．

これと境界条件 $y(0)$，$y'(0)$ とによって ⑥ の一意解が定まる．

微分方程式の観点からいうと，特性方程式の解が虚数の場合について触れないわけにはいかず，それは Euler の公式によって美しくまとめられるが，漸化式においては煩雑にしかならないため，ここで触れることはしない．

ここに，連続量と離散量の相違や，複素数の実数とは本質的に異なる難しさの一端が見られるようにも思うが，それについては別の機会にする．

3　特性方程式について

式番号は ① から振り直す．

線型代数学では，正方行列 A に対して，特性方程式は

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

を考える．つまり，写像 A によって $\boldsymbol{x}$ の方向が変わらない（逆向きは可）ためのスカラー量を求めることが端緒であった．

まず，隣接三項間漸化式

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$$

について考える．これは，

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

で，特性方程式は

$$\begin{vmatrix} t-p & -q \\ -1 & t \end{vmatrix} = t(t-p) - q$$

$$= t^2 - pt - q$$

となる．

なお，余談だが隣接四項間漸化式

$$a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$$

であれば

$$\begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

であるから，特性方程式は

$$\begin{vmatrix} t-p & -q & -r \\ -1 & t & 0 \\ 0 & -1 & t \end{vmatrix} = t^2(t-p) - r - tq$$

$$= t^3 - pt^2 - qt - r$$

となる．

さらに，前節までで述べたこと，すなわち $a_{n+1} = ta_n$ を仮定すれば

$$t^3a_n - pt^2a_n - qta_n - ra_n = 0$$

$$(t^3 - pt^2 - qt - r)a_n = 0$$

より，$t^3 - pt^2 - qt - r = 0$ が導出できる．そして，互いに異なる解 $t = \alpha, \beta, \gamma$ であれば

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n$$

となる．

このように隣接三項間以上の漸化式であれば同様に論じることができる．

さて，微分方程式について見てみよう．

$$y'' - py' - qy = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で，微分作用素 $D : y \longmapsto y'$ は，① の線型変換で，$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$y'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として得られる解を $\boldsymbol{e_0}$，$\boldsymbol{e_1}$ とすれば，基底 $< \boldsymbol{e_0}, \boldsymbol{e_1} >$ に関する D の行列は $\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ になり，あとは前節までと同様である．

さて，隣接二項間漸化式については固有値ではなく，不動点であったため特性方程式としては質が異なると述べたのだが，これについて同様の観点から考えてみよう．

$a_{n+1} = pa_n + q$ を

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ q \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

とし，$A = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．ただし，$p \neq 1$ である．このとき，特性方程式は

$$\begin{vmatrix} t-p & -1 \\ 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-p)(t-1)$$

より，$(t-p)(t-1) = 0$ を解いて，固有値が $t = 1, p$ で，$t = 1$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{p-1} \\ -1 \end{pmatrix}$，$t = p$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる．

ここで，$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{p-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，

$P^{-1} = \dfrac{1}{p-1}\begin{pmatrix} 0 & 1-p \\ p-1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

となるから，

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \frac{1}{(p-1)^2}\begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ -(p-1) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} 0 & 1-p \\ p-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(p-1)^2}\begin{pmatrix} p^{n-1}(p-1)^2 & (p^{n-1}-1)(p-1) \\ 0 & (1-p)^2 \end{pmatrix}$$

ここでスペースの関係で，習慣上利用しない「×」を利用した．

さて，② より，

$$\begin{pmatrix} a_n \\ q \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ q \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ q \end{pmatrix}$$

であるから，

$$a_n = p^{n-1}a_1 + \frac{p^{n-1}-1}{p-1}q$$

となる．

ところで，固有値が 1, p であったことから，隣接三項間以上の漸化式のときから類推して，

$$a_n = Ap^{n-1} + B\cdot 1$$

とおくと，

$$pa_n + q = Ap^n + Bp + q$$

であり，一方

$$a_{n+1} = Ap^n + B$$

であるから，これらが一致すると考えて

$$Ap^n + Bp + q = Ap^n + B$$

$$B = Bp + q$$

となる．

以上のように，固有値という観点から見ても，その系のような形として，隣接二項間漸化式に対する‘‘特性方程式’’を導くことができる．

参考文献

[1] 齋藤正彦,『線形代数入門』, 東京大学出版会, 1966
[2] 高橋陽一郎,『微分方程式入門』,
東京大学出版会, 1988
[3] 長谷川考志他,『数学 B』, 第一学習社, 2018
[4] 古屋茂,『新版　微分方程式入門』,
サイエンス社, 1996
[5] 吉田耕作,『微分方程式の解法』, 岩波全書,
1954（第 1 版）, 1978（第 2 版）
[6] 竹内英人他,『Focus Gold 数学 II+B（第 4 版）』,
啓林館, 2017