Title	現実的な文脈を取り入れた数学科授業の設計に関する研究 : Realistic Mathematics Education を手がかりに(修士論文要約)
Author(s)	小林, 廉
Citation	学芸大数学教育研究(19): 101-110
Issue Date	2007
URL	http://hdl.handle.net/2309/70555
Publisher	東京学芸大学数学教育学科
Rights	

修士論文要約

現実的な文脈を取り入れた数学科授業の設計に関する研究
—Realistic Mathematics Education を手がかりに—

小林　廉

本研究の目的は，現実的な文脈を授業に取り入れる際の望ましい位置づけを明確にするとともに，その位置づけに基づいた授業を実現するための設計方法を確立し，それを基に授業案を設計することである。そのための主たる方法として，数学教育へのオランダによるアプローチである Realistic Mathematics Education（RME）の考察を行った。結果として，RME における文脈の位置づけは現実的な文脈を取り入れる上での課題を解決しうること，そのためには RME の「モデル」の役割が重要であることがわかった。そこで「モデル」を軸とした RME 授業設計理論の解明を試みた結果，導出した授業設計の原理を基に授業設計方法を確立することができ，「数列」に焦点をあてた授業設計を行うことができた。

本論文の構成

序　本研究の目的と方法

わが国の多くの高校生は数学を役立たないと思っており，数学に対する好感度も高くない。この現状に対して，数学学習の意義を実感させるために，実生活における数学の有用性を実感させることが求められている[1]。一方，高度情報化社会や変化の激しい社会を背景として，数学を用いて実生活の問題を解決する能力を育成する必要性が指摘されている[2]。こうしたことから，現実的な文脈に埋め込まれた問題を解決することに関わる数学科授業が一層求められていると言える。

しかしながら，高等学校の数学科授業に現実的な文脈が十分に取り入れられているとは言い難い[3]。これを改善するためには，その原

因を特定して解消を図る必要がある。その上で，授業における現実的な文脈の最も価値ある位置づけを追究し，その価値を実現するための授業設計方法の確立を試みる必要がある。即ち，本研究の目的は，現実的な文脈を授業に取り入れる際の望ましい位置づけを明確にするとともに，その位置づけに基づいた授業を実現するための設計方法を確立し，それを基に授業案を実際に設計することである。

この目的に対し，本研究では主として次の方法を用いる。まず，現実的な文脈を取り入れることの教育的価値と課題を整理・明確化するために，「数学的モデル化」に関する先行研究の理論的考察を行う。次に，現実的な文脈の望ましい位置づけとそれに基づいた授業設計方法の確立に対して示唆を得るために，オランダによる数学教育へのアプローチ‘Realistic Mathematics Education（RME）’の理論的考察を行う。以下にみていくように，RME の‘Realistic’は所謂「現実の世界」を指す語ではないが，それは「現実の世界」との結びつきが重要でないということを意味しない。さらに，RME では「文脈」が明確な位置づけを与えられ，授業設計のための「発見法」なる理論が生み出されてきた。こうした特徴をもつ RME を考察することで，本研究の目的に対する示唆を得られると考えた。

1　現実的な文脈を取り入れることの教育的価値と課題

(1) 本研究の意図する「現実的な文脈」の意味

はじめに，本研究の意図する「現実的な文脈」の意味を明確にしておく。まず，「文脈」は，本研究では PISA2003 年調査の評価の枠組みにある「状況」と「文脈」の意味[4]を基に，「問題が置かれている特定の環境」という意味で用いることにする。次に，「現実的」というラベルは，所謂「実生活」や「現実の世界」のものであるという意味で用いるが，その要件として，次の数学的モデル化過程（図 1）の発生を意図することにする。

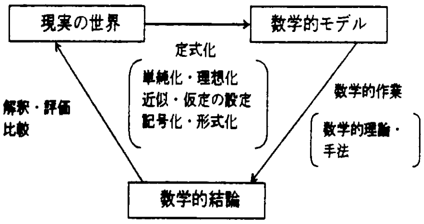

図 1 数学的モデル化過程（三輪辰郎，1982）

即ち，本研究の意図する「現実的な文脈」の意味は，「問題が置かれている特定の環境」が現実の世界のものであり，数学的モデル化過程を発生させるものであるということである。

(2) 現実的な文脈を取り入れることの教育的価値

現実的な文脈に埋め込まれた問題(以下「文脈問題」）を解決する際，数学的モデル化を行うことになる。その教育的価値は，三輪辰郎（1983，1986）や W.Blum＆M.Niss（1991）によって論じられてきた。氏らの記述は，実用的目的・陶冶的目的・文化的目的に数学学習の促進を加えた四点に整理でき，数学的モデル化が数学教育の目標達成にいかに貢献しうるかがわかる。ここでは，それぞれの観点において本研究が大切にしたい価値を挙げる。

表 1 数学的モデル化の教育的価値の整理

＜数学学習の促進＞
- 数学教育に対する動機付けを与えること。

＜実用的目的＞
- 学校数学をより応用可能なものにしようとすること。
- 数学の知識理解をいっそう深めること。

＜陶冶的目的＞
- 数学的な考え方の育成を図ろうとすること。
- 知識開発という探求的・創造的・知的な活動の過程に生徒を参加させようとすること。

＜文化的目的＞
- 数学の豊富で包括的な全体像を生徒たちに対して確立させること。

(3) 現実的な文脈を取り入れる際の課題

現実的な文脈を取り入れることによって表1の教育的価値を期待できるにもかかわらず，それは十分に取り入れられているとは言えない。こうした現状を打開するために，本研究では以下の二点を課題として設定した。

第一に，現実的な文脈の授業における位置づけとその位置づけに基づいた授業設計方法が，先の教育的価値を実現するものであるようにすることである。西村圭一（2001）は数学的モデル化教材を扱う授業の枠組みについて考える必要性を指摘した。現実的な文脈を授業にどのように取り入れるべきであるかという点に関しては，より一層の研究を重ねていく必要があると考える。そのとき追究すべきは教育的価値の実現であろう。

第二に，授業における現実的な文脈の授業の位置づけとその位置づけに基づいた授業設計方法が，「現実の世界」と「数学の世界」の間の隔たりを解消するものであるようにすることである。この二つの「世界」はしばしば分けて論じられるが，両者の間に隔たりがあるからこそ生じていると考えられる問題点が指摘されている（例えば長崎栄三，1997；西村圭一，2001）。現実的な文脈を積極的に取り入れることを目指す上では，その隔たりを良い形で解消していかねばならない。

以上二点の課題解決に対する示唆を得るために，以下ではRMEを考察していく。

2 Realistic Mathematics Education（RME）にみる授業設計の原理

(1) RMEの意味と哲学

RMEは，オランダのフロイデンタール研究所が1970年代初頭から発達させてきた，数学の教授・学習への理論的アプローチである[5]。その特徴は，H.Freudenthalの「人間の活動としての数学」を哲学にもち，氏の大局的な理論を指針とする局所的な開発研究の結果から帰納的に構成・発展されていくことである[6]。

H.Freudenthalは，「人間の活動としての数学」における中心的な「活動」として「組織化」を指す（H.Freudenthal，1971）。さらに，数学的手段を用いた組織化のことを「数学化」と呼ぶ（同，1973）。「数学化」は様々な活動を含むが[7]，「数学化」する対象に即して，「現実の数学化」と「数学の数学化」に区別される（同，1973）。そして，数学の体系に沿って公理から展開される学習ではなく，両者の「数学化」の学習を主張するのである（同，1968）。

「数学化」は，後に，RMEを帰納的に構成した代表的な人物であるA.Treffersによって，次のように定式化される（A.Treffers，1987）。

水平的数学化：数学的手段によって問題を解決することを可能にする領域の図式化
垂直的数学化：「水平的数学化」に続いて関係する，問題の解決，解決の一般化，さらなる形式化

RMEは，両者の「数学化」を明確に志向するという点で特徴付けられるようになった。但し，RMEの‘Realistic’は本研究が意図する「現実的な」という意味ではない点に注意する。それは，「生徒たちが*想像*できる問題状況を与えられるべきであるという意図に言及する」（M.van den Heuvel-Panhuizen，2003）とあるように，心的な対象や活動を含む。本研究ではこれを「実感のある」という意味で捉える。

(2) RMEを考察する意義と観点

本研究がRMEを考察する意義として，主として次の二点が挙げられる。第一に，「数学化」という活動が根幹にあることである。このことから，例えば数学的活動の実現など，現実的な文脈を取り入れることによる教育的価値の実現可能性を高める授業設計に関して

示唆を得られることが期待できる。

第二に,「水平的数学化」と「垂直的数学化」の両者を志向することである。二つの「数学化」は強く相互作用するが (A.Treffers, 1987), その上で両者の実現が追求される以上,「現実」と「数学」という二分の解消が試みられていることを期待できる。即ち,「現実の世界」と「数学の世界」の間の隔たりを解消することに関して示唆を得られることが期待できる。

以下では，まず，RME における文脈の位置づけを明らかにした上で，その位置づけが実現しうる教育的価値とその実現について，そして「現実の世界」と「数学の世界」の間の隔たり解消について考察する。次に，その位置づけに則った授業設計理論を明らかにしながら，授業設計の原理を導出する。

(3) RME における文脈の位置づけに関する考察

(3.1) RME における文脈の位置づけと機能

RME における文脈の位置づけの根幹には，H.Freudenthal の教授原理「再発明」と「教授学的現象学」がある。「再発明」は，端的には，学習者は人類の学習過程を繰り返すべきであるということである (H.Freudenthal, 1973)。具体的には，数学的概念・構造・アイデアによって組織化される現象の探究から学習を始め，組織化によってそれを処理するのを教えるということであり，その現象を準備するのが「教授学的現象学」である (同, 1983)。

その「教授学的現象学」を教授理論の枠組みに用いたのが，先述した A.Treffers (1987) である。氏は，教授原理の一つに「文脈による現象学的探究」を挙げた。ここで文脈に明確な位置づけが与えられたと言える。その位置づけを本研究では次のようにまとめておく。

文脈は，教授をねらいとする数学的概念・構造・アイデアが組織化するツールとして生じる現象を与え，その探究から学習を始めさせるものである。

なお，学習過程では,「数学化」を進展させるために，最初だけではなく，連続的に文脈が与えられていく (K.Gravemeijer, 1997a)。

以下，文脈の機能として RME に記述されているものを，三点にまとめる。

①「現象学的探究」としての機能

例えば，数学への自然な接近を与えるという意味で「概念形成」を促し，非形式的な解決手段と形式的な解決手段とを結びつけることで「応用可能性」を高める (A.Treffers, 1987)。

②「垂直的道具」としての機能

この機能の根幹には H.Freudenthal の学習水準論がある。氏は，van Hiele 水準を基にして,「再発明」による学習過程は水準によって構造化されるとする[8] (H.Freudenthal, 1973)。この学習水準論は後に RME の前提となるが，そこで水準上昇の役割をするのが「垂直的道具」であり，その中心に「モデル」がある (A.Treffers, 1987)。RME における「モデル」の基本的な位置づけは，図 2 にあるように，文脈固有で非形式的な解決の水準 (「状況」) と一般的で形式的な解決の水準(「形式的な知識」) との「媒介」である。ここで,「再発明」では「状況」から始まる水準上昇が求められるため，生徒によって構成された「状況」のモデル (model-*of*) が，後に「形式的な知識」のためのモデル (model-*for*) として役割を果たす必要がある (図 3 ; 以上，K.Gravemeijer, 1997a)。「モデルが推移する」というアイデアが,「モデル」を「垂直的道具」たらしめる。

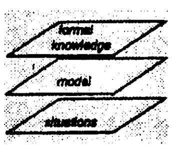

図 2 媒介「モデル」

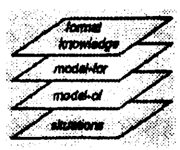

図 3 model-of と model-for

例えば長除法の学習では，実生活においてものを分ける活動のモデルとして「累減」が構成され，短縮化された「累減」の図式がアルゴリズムについて推論することのためのモデルとして機能する（K.Gravemeijer，1997b）。

A.Treffers (1987) は，文脈の機能として「モデル形成」を挙げた。「モデル」を生み出す素となる上で，文脈の働きが決定的である。

③新たな数学的リアリティを創造する機能

非形式的な知識と形式的な数学との間のギャップを橋渡しするために，「再発明」過程において数学的リアリティを段階的に出現させ，両者とも同じ「リアリティ」の一部にする。そこに文脈が利用される。即ち，「生徒にとって経験を経てリアルである問題状況」としての文脈に埋め込まれた問題を解決することは，生徒たちがリアリティを拡張することを助ける（以上，K.Gravemeijer＆M.Doorman, 1999）。

(3.2) 考察

まず，RME における文脈の位置づけがどのような教育的価値を実現しうるか考察する。

第一に，数学の応用可能性を高めることが期待できる[9]。というのも，現実の世界の問題解決には「水平的数学化」が必要になることから，最初から「水平的数学化」と「垂直的数学化」を経て見いだした数学的知識の方が，後にそれを応用するときにその経験が活きると考えられるからである。また，非形式的な解決活動と形式的な解決活動を結びつけることによって，新たな問題の自力解決がその非形式的な解決と同質であると判断できれば，そこに形式的な解決手段を応用できると考えられる（K.Gravemeijer，1997a）。さらには，「学んだ数学の内容をどう応用するか」ということよりも，「どう問題を解決するか」という態度で問題解決に臨ませることを期待できるからである（K.Gravemeijer，1997b）。

第二に，概念形成と数学的知識の獲得を促進することが期待できる[10]。これには特に「モデル」が関係する。「モデル」を用いることによって，非形式的な解決活動と形式的な解決活動がつながり，非形式的な解決活動にあった意味が形式的な解決活動においても保存されていることが期待できる。また，「モデル」の存在は，「形式的な知識」のためのモデルの存在を約束するということである。

第三に，数学的な考え方を育成することが期待できる。杉山吉茂（1989）は，数学的な考え方を「数学を創造し，発展させる考え方」とし，「数理化する考え」と「数学に発展させる考え方」を含めた四つに分類した。ここで，「水平的数学化」は「数理化する考え」に，「垂直的数学化」は「数学に発展させる考え方」に対応すると考えられる。氏は，数学的な考え方の育成に当たり，「創造的，発展的」な学習の場で数学的な考え方を「経験させること」を挙げるが，これはまさに「再発明」の場であると考えられる。実際，氏は，創造的な学習の場として，「人類が作り上げてきたもの，見つけてきたものの再発見，再創造」を意図しているのである。

第四に，第三の点と関係して，創造的な経験を期待できる。「再発明」は，十分に創造的な過程であると考えられるからである。

第五に，「人間の活動としての数学」という数学に対する認識を与えることが期待できる。H.Freudenthal（1991）は，「再発明」の価値に「人間の活動としての数学」を経験する態度の育成を挙げる。これは，数学という文化が人間の営みとしてどう生まれてきたかという

点に目を向けることを可能にすると考える。

次に，RMEにおける文脈の位置づけが，「現実の世界」と「数学の世界」の間の隔たりをどのように解消しうるかを考察する。文脈の機能③から，生徒たちにとってリアリティがある「現実の世界」から学習を始め，リアリティを徐々に拡張し，最初は形式的な「数学の世界」をその一部にする試みが考えられる。いわば，「現実の世界」における活動から「数学の世界」における形式的な数学を創り出すことを志向して，両者間にある隔たりの解消を試みるのである。このとき機能するのが「文脈」と「モデル」である。前者は，新たな数学的リアリティ創造の手段として用いられ，後者は，新たな数学的リアリティを創造するように設計される（K.Gravemeijer＆M.Stephan, 2002）。また，「モデル」は，「現実の世界」の活動から「数学の世界」の形式的な数学を創り出す有用な手段となることが期待できる。

以上の考察から，RMEにおける文脈の位置づけは，本稿1で挙げた課題を解決しうることがわかる。よって，本研究において求める現実的な文脈の位置づけは，基本的にRMEにおける文脈の位置づけに沿うこととする。

(4) RMEにおける授業設計方法に関する考察

本研究では，RME授業設計理論のうち，「モデル」を軸とする「現れ出るモデル」に着目する。前節の考察から，「モデル」が重要な働きをすることが明らかになったからである。

(4.1)「現れ出るモデル」の理論

以下では，K.Gravemeijerの一連の研究[11]を中心に，「現れ出るモデル」の理論をまとめる。

①「モデル」と「モデル化」の概念

状況を「モデル化」するのではなく，状況における非形式的な行動を「モデル化」するのであり，生じた「モデル」は組織化する活動の結果である。例えば，測定において，10や1などの「測定単位を反復適用すること」の「モデル」として「定規」が現れる（K.Gravemeijer＆M.Stephan, 2002）[12]。

②model-ofからmodel-forへの推移と活動の水準

「まず，モデルが状況において活動することの文脈特有モデルとして構成され，それからそのモデルは状況を越えて一般化される。そのモデルは特徴を変化させ，それ自身実在となり，そうであるがゆえに，それはより形式的な数学的推論のためのモデルとして機能できるのである」（K.Gravemeijer, 2002）。例えば，model-ofとして現れる「定規」は，注意が測定することからその結果について推論することへ移行することで，二位数の加法・減法の暗算ストラテジーについて推論するためのモデルである「目盛りのない(empty)数直線」に推移する。このmodel-forは，次の図4のように計算に用いられる。

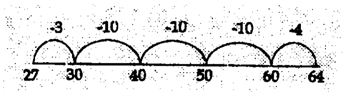

図4　「目盛りのない数直線」における64－37

「モデル」の推移と同時に，「モデル化される状況における活動についての思考」から「数学的関係についての思考」への推移が生じる。数学的関係の枠組みを段階的に構築すると，「モデル」がその意味を数学的関係の枠組みから引き出すようになり，それは「ある特定の設定における数学的活動を記号化する方法」（model-of）としてよりも，「数学的推論のための土台」（model-for）として重要になる（K.Gravemeijer, 2002）。先の例では，「数関係の枠組み」（例えば37=30+7, 37=3×10+7, 37=20+7, 37=40-3などの関係）を構築するこ

とが，測定に縛られない数学的実在としての数の見方を可能にする。この発達過程は，「活動の水準」として次のように特徴付けられる。

表2　活動の水準（K.Gravemeijer, 1999；例は K.Gravemeijer＆M.Doorman, 1999）

1.	課題設定における活動；解釈と解決が，課題設定（しばしば学校外の設定）における行動の仕方の理解に依存する。（例：10 と 1 の単位で測定すること）
2.	参照的活動；model-of が，教授活動において記述される設定における活動を参照する。（例：定規上の位置を，測定単位を反復適用することの結果を意味するものとして解釈すること）
3.	一般的活動；model-for が，状況特有の心象と無関係に解釈と解決に焦点をあてることを可能にする（例：計算方法について推論するために定規／数直線を用いること）
4.	より形式的な数学的推論；数学的活動を達成するためのモデル（model-for）の支えにもはや依存しない（例：数関係の枠組みという数学的リアリティにおける数関係を用いて推論すること）

③新たな数学的リアリティの創造

「モデル」の推移は，新たな数学的リアリティの創造と同時に起こらねばならない。model-of を用いた活動がその創造を促進し，新たな数学的リアリティにおける発達を通して，model-for に推移する（以上，K.Gravemeijer ＆M.Stephan, 2002）。先の例では，「数関係の枠組み」が新たな数学的リアリティである。

④「モデル」と「記号化」

「モデル」は様々に現れ，一連の「記号化」に展開される。即ち，「モデル」は一つではなく，「記号化」すべてを包含する概念である。先の例では，model-of は「定規」，model-for は「目盛りのない数直線」と異なっているが，それらは「定規」の概念に包含される。

(4.2) 考察

「モデル」を取り入れた授業を設計するための原理を次の二点にまとめる。主として「モデル」の選択と推移のさせ方に関係している。

表3　考察から得られた授業設計の原理

<授業設計の原理Ⅰ>
「モデル」の推移をもとにした活動の4水準を前提にしたとき，全ての活動の水準において本質的な活動が一貫している必要がある。
① 活動の4水準の最上位である「より形式的な数学的推論」における活動の分析
② ①をもとにした model-for の選択
③ model-for と生徒たちのリアリティを考慮しての model-of の選択
④ model-for と model-of が生じるための文脈問題の条件の明確化と設計

<授業設計の原理Ⅱ>
model-of から model-for へと推移する際に核心的であることは，数学的関係の枠組み構築である。
① 構築すべき数学的関係の枠組みの分析
② 数学的関係の枠組み構築を意図できる活動の分析
③ 数学的関係の枠組み構築を促す手段としての文脈と議論による反省の条件の明確化と設計

（※数字は，原理に対する行動とその順番を指す。）

原理Ⅰは次のことから見いだせる。まず，水準4を授業の目標とみなす。model-for はその活動を支えるモデルであり，その選択には水準4の活動の分析が不可欠となる。次に，水準3の活動に不可欠な心象が水準2で形成される必要がある（K.Gravemeijer, 1999）。即ち，両者の活動の本質的な部分が同じである必要がある。これは水準2と1についても同様である。例えば，「目盛りのない数直線」上で10の単位で計算した後に1の単位を調整する計算と，「定規」上で10の単位で測定した後に1の単位を調整する測定では，その活動自体は変わっていないとみる。但し，他の事例（K.Gravemeijer＆M.Doorman, 1999）から，水準2に不可欠な心象が既に形成されていると考えられる場合は，水準2から学習を始められることが示唆された。

原理Ⅱは次のことから見いだせる。「モデル」の推移については，model-of を用いながら数学的関係の枠組みを構築し，その枠組み内にネットワークをつくると，問題に含まれる数学的関係について思考することが可能に

なるとされていた。このことから，まず構築すべき数学的関係の枠組みを，次にその枠組みを構築できる活動を分析する必要がある。その活動は，具体例の考察から，「文脈」と数学的関係の「議論」によって促されることがわかった。例えば，「定規」を用いた活動と「目盛りのない数直線」を用いた活動の間には，目の前に存在しない対象を測定する文脈が設けられ，実際に測定する活動から離れていくようにされる。また，「議論」は集団による反省を促すが，水準2の活動を反省することは水準3の活動へ推移する一つの条件となっているのである（K.Gravemeijer et al.,2000)。

3 現実的な文脈を取り入れた授業設計

(1)本研究における現実的な文脈の位置づけと授業設計方法の確立

本研究における現実的な文脈の位置づけはRMEに沿うことにした。但し，一つの文脈でも様々な問題を与えることはでき，そこに様々な価値を見いだせることを踏まえておく（小林廉,2006)。結果として次のようにする。

> ある数学的概念・構造・アイデアの教授を目標とする授業は，その概念・構造・アイデアが組織化するツールとして生じる，現実的な文脈に埋め込まれた問題の解決から始まり，同様の問題解決を繰り返す。いわば，現実的な文脈は授業の最初とそれ以降の過程に位置づけられ，その時々において問題解決を引き起こし，解決ツールを洗練させていく役割を担う。

授業設計方法については，表2の活動の水準を枠組みとして，表3の授業設計の原理を「問い」の形にして起こしていった。

表3 本研究における授業設計方法

Ⅰ.全体像の設計

Ⅰ-ⅰ.基礎部分の設計

(1) 授業の目標は何か。即ち，「より形式的な数学的推論」の水準において意図する活動はどんな状態であるか。

(2) 授業を始めるにあたっての既習範囲はどこまでか。

(3)「より形式的な数学的推論」に含まれる活動は何か。特に，「より形式的な数学的推論」を行うにあたっての本質的な活動で，その活動を行う上で求められる理解は何か。

(4)「一般的活動」を行うにあたって構築されているべき数学的関係の枠組みは何か。

Ⅰ-ⅱ.モデルの設計

(5)「より形式的な数学的推論」の土台となれる「モデル」(model-for) は何か。そのモデルは数学的関係に焦点をあてることができるか。

(6) その「モデル」は生徒たちがつくることはできるか (model-of)。できないとしたら，本質的な活動の部分は保存したまま，生徒がつくることのできる形に変える。

(7) その「モデル」が生徒たちの非形式的な解決から生じるための文脈問題の条件は何か。

Ⅰ-ⅲ.model-ofからmodel-forへの推移を引き起こす部分の設計

(8) 数学的関係の枠組みの構築を意図できる活動は何か。

(9) 数学的関係の枠組みの構築を意図できる活動を引き起こす文脈と議論の条件は何か。

Ⅱ.文脈問題の設計

(1)「モデル」が生徒たちの非形式的な解決から生じるための条件を満たす文脈問題は何か。

(2) 数学的関係の枠組みを構築するための条件を満たす文脈問題は何か。

Ⅲ.議論の設計

(1) model-ofからmodel-forへの推移を促す問題解決において，何を話題としたどんな議論をすべきか。

修士論文では，等比数列に焦点をあてて「リピートファイブ」というねずみ講の文脈で展開する授業と，漸化式に焦点をあてて「薬の量を調べる」という文脈で展開する授業を設計した。本稿では後者を取り上げる。

(2) 現実的な文脈を取り入れた授業設計

(2.1) 設計（番号は表3に対応）

Ⅰ．全体像の設計

> (1) $a_{n+1}=pa_n+q$ （$p\neq 0,1$ $q\neq 0$）なる再帰関係を問題に見いだして漸化式に定式化し，そこから数列，グラフ，そして一般項を生み出すことによって問題解決できる状態。
>
> (2) 数列と和については既習で，漸化式については初めて学習することを想定する。
>
> (3) 再帰関係を漸化式に定式化することと，漸化式から一般項へ再定式化することに焦点をあてる。特に特性方程式を用いた方法と特

性解の意味について注意する必要がある。

(4)「再帰関係」と,「数列の表現間の関係」の二つを考える。

(5) model-for を,「再帰関係から具体的に数値を求めていく手続き」と,「数値表現(数列)から一般項を求める手続き」とする。それは,再帰関係を実感するために再帰的な計算を実行する必要があると考えること,いきなり漸化式から一般項に変形してもその意味がわかりづらいと考えることによる。

(6) これらの model-for は,漸化式を学習する段階では十分に行える活動によって生じるため,model-of ともなる。

(7) 再帰関係を内在している,一般項を求めることに意味がある,数列の収束が実感できる,の三点を挙げる。三点目は,特性方程式と特性解の意味づけに $-1<p<1$ のとき a_n が特性解に収束するのを利用する意図がある。

(8) まず,再帰的な計算と繰り返し同じ操作を行ってきたことの反省を行う。次に,漸化式ができたら,グラフ電卓で漸化式から数表と点プロットを簡単につくれることを示す。

(9) 文脈の条件は (7) と同様であり,議論としてはどんな具体的な計算をしたのかということと,数列・グラフ・漸化式を関連付けられたことを話題にする。

II. 文脈問題の設計

(1) 本設計では「薬」の題材に着目した[13]。薬にはリアリティがあると考えられるし,数列が収束していくことに薬の量の安定という意味を付与できる。特に,三木直正ほか(2005)による「投与間隔をその薬物の半減期にとると…血中濃度は初期ピークの2倍になる」という記述に着目した。これは血中濃度を薬の量に置き換えても同様である。服用直後に体内にある薬の量 M_n と服用直前に体内にある薬の量 m_n について,服用後の減少の割合を $100p$ (%),服用量を q (mg) とすると,

$$\begin{cases} m_1 = 0 \\ m_{n+1} = p(m_n + q) \end{cases} \qquad \begin{cases} M_1 = q \\ M_{n+1} = pM_n + q \end{cases}$$

として定式化できる。一般項は,

$$M_n = -\frac{q}{1-p}p^n + \frac{q}{1-p}, \quad m_n = -\frac{q}{1-p}p^n + \frac{pq}{1-p}$$

となり,$p<1$ より $n\to\infty$ のときそれぞれ極限値が存在して,$\frac{q}{1-p}$,$\frac{pq}{1-p}$ となる。半減期は $p=0.5$ であるため,m_n は服用量で,M_n は服用量の2倍で安定する。このように,m_n と M_n の二通りの問題状況を考えることができ,割合と服用量を変えた一般化も可能である。そこで,「薬」を採用し,次の文脈を設定した。

あなたも一度は病気にかかり,薬を飲んだ経験があると思います。風邪でも何でも,たいていは薬を定期的に飲まなくてはなりません。病院で受ける点滴も定期的に投与されます。ここで,ある一つのケースを考えてみましょう。

ある病院に通っているAさんが,病気を治療するためにある薬を服用しているとします。一回に服用する量は 40mg ですが,新陳代謝によって体内に残っている薬の量が約6時間後に全体の約半分になってしまうということで,6時間ごとに定期的に同じ量の 40mg を服用するよう医者から指示を受けました。

薬は,安全に用いれば効果のある一方で,誤って用いると取り返しのつかない事態になってしまうものです。上の説明を聞いたAさんは,自分が服用している薬の量についてもっと調べてみることにしました。

(2) 服用直後・服用直前の場合の変化を調べる問題を解決した後,安定する値について調べる問題を課すことにする。

III. 議論の設計

(1) 安定する値について調べる問題において,計算の短縮化を求める声が出てくることを期待し,それを受けて 50%,40mg のときの服用直後の場合に戻り,どのような計算をしていたのか議論する。漸化式ができたら,グラフ電卓で数表とグラフを作成して見せ,「漸化式から数列とグラフを生み出すことができた」ことを強調し,「一般項を生み出すこともできるだろうか」ということを議論する。

(2.2) 想定する授業展開

まず,服用直後に体内にある薬の量の変化を調べる問題を課す。自力解決として,順に数値を求めていくこと (model-of) が想定される。この計算によって数値が 80 に近づいていくが,それは計算した結果に過ぎないことから,数値が安定することの数学的な根拠を問う。この問によって,変化を表す数列の一般項を求めることを期待したい。そこでは階差数列や等比級数を用いた方法に加え,グラフを用いて,$\{a_n-80\}$ の一般項をつくり 80 平

行移動して戻す方法（model-of）も扱う。

次に，服用直前の場合を調べて薬の量の変化に関する解釈を行った後,「安定する値はどのように決まるか」を問題にし，服用量と減少の割合を変えた場合を問う。ここで，Ⅲで設計した議論を展開することにより，具体的に数値を求めた手続きをもとに漸化式に定式化し，数列から一般項を求めた手続きをもとに漸化式から一般式を求めることを期待する（model-for）。特性方程式を用いさせる場合は，「$a_{n+1}=0.5a_n+40$ から $a_n-80=0.5(a_n-80)$ をつくれるか」を問いとする。しかし，そもそも「80 をどうやって見つけるか」が問題となる。そこで，極限値として 80 の意味を再確認し，n が大きくなればなるほど a_n と a_{n+1} の差が小さくなっていくことから,「a_n と a_{n+1} がほとんど等しくなるときの値が 80」という解釈を教師が加える。これを漸化式上に表現させることで，$x=0.5x+40$ をつくらせたい。

4 本研究の総括と今後の課題

本研究の目的は，現実的な文脈を授業に取り入れる際の望ましい位置づけを明確にするとともに，その位置づけに基づいた授業を実現するための設計方法を確立し，それを基に授業案を設計することであった。考察の結果，RME における文脈の位置づけは現実的な文脈を取り入れる上での課題を解決しうること，そのためには RME の「モデル」の役割が重要であることがわかった。そこで「モデル」を軸とした RME 授業設計理論の解明を試みた結果，導出した授業設計の原理を基に授業設計方法を確立することができ,「数列」に焦点をあてた授業設計を行うことができた。

今後の主な課題は，本研究において確立した授業設計方法と設計した授業案を実証的に考察し，評価・改善していくことである。

注

[1]例えば「平成 17 年度高等学校教育課程実施状況調査」では,「数学を勉強すれば，私の普段の生活や社会生活の中で役立つ」に対して肯定的な回答をした生徒の割合が 38.0%にとどまっている。また，指導上の改善点として，社会生活における様々な事象との関連を図るなどして数学の有用性を実感させることが挙げられている（国立教育政策研究所，2007）。

[2]例えば,「今日，また近い将来において，きわめて複雑で急速に変化する社会に対応するため,すべての国々は数学的リテラシーを持つ市民を必要としている。」（OECD,2003）（訳は国立教育政策研究所(2004)より）

[3]例えば「平成 17 年度高等学校教育課程実施状況調査」では,「実生活における様々な事象との関連を図った授業を行っていますか」に対して肯定的な回答をした教師の割合が 29.4%にとどまっている（国立教育政策研究所，2007）。

[4]「状況」とは「課題が置かれている生徒の世界の一部」であり,「文脈」とは「ある状況内における特定の環境」である（OECD, 2003（訳は上掲 2 に同じ））。

[5]フロイデンタール研究所ホームページ（http://www.fi.uu.nl/en/）の‘about’より。

[6]例えば K.Gravemeijer（1998）参照。

[7]後に，K.Gravemeijer（1997a）は，一般性・確実性・正確性・簡潔性の観点から「数学化」を整理した。

[8]但し，相対的，局所的，早くから幾何領域以外に適用しているといった点で van Hiele 水準とは異なる。

[9]参考として，オランダは PISA2003 において 4 位である（国立教育政策研究所，2004）。

[10]参考として，オランダは TIMSS2003 において 7 位である（国立教育政策研究所，2005）。

[11]K.Gravemeijer，1997a，1997b，1999，2002；K.Gravemeijer&M.Doorman，1999；K.Gravemeijer et al.，2000；K.Gravemeijer&M.Stephan，2002 を対象とした。

[12]以下，「定規」に関する例は，全て K.Gravemeijer &M.Stephan（2002）を参照している。

[13]元々の題材は，*Contemporary Mathematics in Context*. course3.partB.（Hirsch, C.R. et al.,2003）から見いだした。

主要引用参考文献

Freudenthal,H.(1973).*Mathematics as an Educational Task*. D.Reidel Publishing Company.

Gravemeijer,K.&Stephan,M.(2002).Emergent Models as an Instructional Design Heuristic. K.Gravemeijer, R.Lehrer, B.van Oers, L.Vershaffel(Eds.)*Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education*. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers. pp.145-169.

Treffers,A.(1987).*Three Dimension*. D.Reidel Publishing Company.

小林廉.(2006).『数学化すること』を重視した授業設計に関する研究—Realistic Mathematics Education を手がかりに—.日本数学教育学会第 39 回数学教育論文発表会論文集 pp.720-725.

（こばやし れん
国立教育政策研究所（非常勤）
〒100-0005 東京都千代田区丸の内 2-5-1
文部科学省ビル 7 階）