Title	認識論的障害の克服に向けた極限の学習指導に関する研究(修士論文要約)
Author(s)	外山, 康平
Citation	学芸大数学教育研究(19): 111-120
Issue Date	2007
URL	http://hdl.handle.net/2309/70556
Publisher	東京学芸大学数学教育学科
Rights	

修士論文要約

認識論的障害の克服に向けた極限の学習指導に関する研究

外山康平

本研究の目的は，A.Sierpinskaによる極限の認識論的障害に関する研究から，現行の高等学校数学科における極限の認識論的障害を捉える枠組みを構築するとともに，新たな具体例としての区分求積法の検証とその克服に向けての指導に対する示唆を得ることである。この目的を達成するために，極限を学習することの価値，極限の理解を示し，先行研究としてSierpinskaによる極限の認識論的障害の特定に関する研究に着目し整理を行った。さらに，極限の認識論的障害を捉える枠組みを構築するとともに，新たな具体例の検証を行うとともに，極限の認識論的障害の克服に向けた指導の示唆を得た。

1．論文構成

2. 研究の目的と方法

本研究の目的は，Sierpinska による極限の認識論的障害に関する研究から，現行の高等学校数学科における極限の認識論的障害を捉える枠組みを構築するとともに，新たな具体例としての区分求積法の検証とその克服に向けての指導に対する示唆を得ることである。

上記の目的を達成するために，以下の課題を設定した。

・極限についての基礎的な考察を通して，極限の概念規定と極限を学習することの意義，極限の理解について整理する。

・極限を理解する学習者に焦点をあて，どのような点に具体的な困難性があるのかを，特に極限の認識論的障害の特定に関する Sierpinska の研究に焦点をあて考察し整理する。

・Sierpinska の極限の認識論的障害を捉える枠組みをもとに，現行の教育課程における高等学校数学科を対象とした極限の認識論的障害を捉える枠組みを構築するとともに，新たな具体例としての区分求積法の検証とその克服に向けての指導に対する示唆を論じる。

以上の3つの課題に対して，次のような方法で研究を進めることとする。

●課題1に対して，極限についての概念規定を行い，極限を学習することの意義はどのような意義か，また極限の理解とは何かという観点から論じる。

●課題2に対して，先行研究をもとに極限の困難性について整理し，主に極限の認識論的障害の特定に関する Sierpinska の研究の文献解釈をもとにした理論的考察を行うこととする。

●課題3に対して，先行研究の整理をもとに，現行の教育課程における高等学校数学科を対象としたときの極限の認識論的障害について吟味を行い，現行の高等学校数学科における極限の認識論的障害を捉える枠組みを構築する。そして，それをもとに，具体的事例として曲線によって囲まれた図形の求積場面をとりあげ，極限の認識論的障害を特定するとともに，どのようにして極限の認識論的障害を生徒に克服させるのかという視点から見直した際の極限の学習指導への示唆を論じる。

3.極限の概念規定と極限を学習する意義

本研究では，高等学校数学科において扱われる極限として，次のように極限を規定する。すなわち，「伴って変化する 2 つの変数に対して，独立変数を限りなく大きくしたとき，限りなく小さくしたとき，もしくはある値に限りなく近づけたときに，従属変数がある一定の値へ限りなく近づいていくことを，その従属変数が収束すると定義する。伴って変化する2つの変数に対して従属変数に収束する場合，その従属変数が限りなく近づいていく一定の値」を極限として概念規定する。

また，極限を学習する意義として，これまで学習してきた関数をより高い立場から捉え，さらに関数を捉える力を養うことができるという点，より発展した解析学の基礎となるという点，創造的な態度を育成することができるという点などが確認される。さらに，極限の理解としては，具体的にはどのような観点が目標とされるのか。特に，本研究では次の4点を極限の理解として設定した。

①伴って変化する2つの変数に対して，収束，発散，振動を判断でき，その変化の様相の意味を説明できる。

②伴って変化する2つの変数に対して，従属変数が収束する場合，収束する値を求めることができ，その値の意味が説明できる。

③極限の記号の意味，無限大を表す記号の意味を説明できる。

④変化する幾何学的な対象に対して，適切に幾何学的対象の変化を解釈でき，伴って変化する 2 つの変数を特定できる。

4. 極限の学習における認知的障害と認識論的障害

①認識論的障害の概念規定と認識論的障害に着目する意義

極限の理解を目標とした場合，よりよい指導へ向けての示唆を得るために，極限の理解に対する学習者にとっての困難性に着目することは重要であると考える。

B.Cornu によれば，学習過程において生徒たちが出会う特定の困難性として認知的障害が規定されている。そして，Cornu は，認知的障害の源に着目し，認知的障害を3つの障害に特徴づけている。

認知的障害―特定の性質をもつものではないが広範囲にわたって発生している学習上の困難性。

さらに，障害の源を見た場合，障害の種類を次の3つの障害に特徴付けることができる。

発生的心理学的障害―学習者の発達段階の限界が源である障害

教訓的障害―学習者の理解の欠如を引き起こす以前の指導や教師の性質が源である障害

認識論的障害―学習場面における数学的概念それ自身が持つ性質が源である障害

本研究では，他の先行研究による概念規定と比較し，より端的に困難性の性質が整理されていると考え，Cornu による認知的障害の特徴づけに従い，上記のように認知的障害と認識論的障害を概念規定する。

さらに，Cornu は次のように述べる。

生徒たちが起こす過ちは、障害を探すことに対する価値ある暗示である。したがって、生徒たちを指導することに対する教授法のストラテジーの組み立ておいては、そのような障害に気づいていなければいけない。それどころか、教授法のストラテジーの組み立ては、そのような障害をさけることが問題なのではなく、生徒がそれらに出会ったりそれらを克服したりするよう導くために、獲得されるであろう修正された数学的概念の構成要素の一部として障害を見ることが問題なのである。

即ち，どのような認識論的障害が存在するのかを明らかにし，学習者にその認識論的障害をさけさせるのではなく克服させることによって理解を目指す指導を構築することを意図して指導を見直すことが重要となると考えられる。

②Sierpinska による極限の認識論的障害を捉える枠組み

Cornu と同様に，数学的な概念それ自身による困難性として，Sierpinska もまた認識論的障害を特徴付けている。 Sierpinska によって，1985 年に提案された極限の認識論的障害を捉える枠組みは，先にあげた Cornu によって指摘される極限の認識論的障害を網羅しながらも，その他の極限の認識論的障害に対しても着目しており，極限の認識論的障害を捉えるための明確な視点を与える枠組みとして捉えることができると考え，本研究では特に焦点を当てた。

Sierpinska(1985)によって特定された極限の認識論的障害を捉える枠組みは，主に5つの障害のグループ，すなわちⅠ.「無限への恐怖」，Ⅱ.「関数の概念に関連付けられる障害」，Ⅲ.「幾何学的障害」，Ⅳ.「論理的障害」，Ⅴ.「記号の障害」に特色付けられ，下記の枠組みによって示されている。

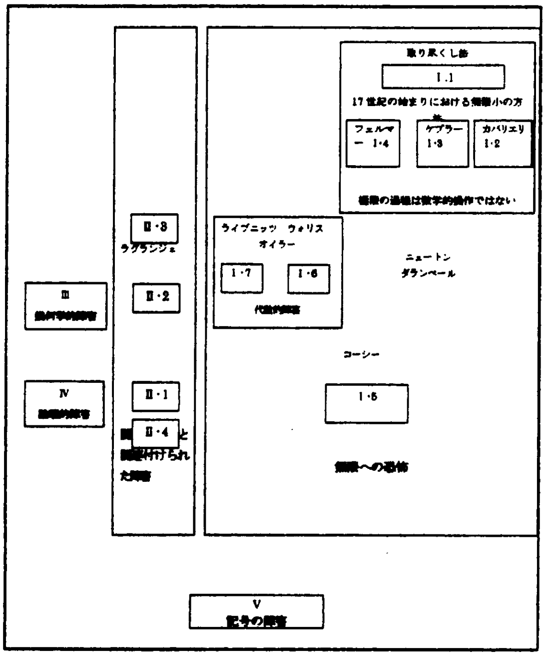


表 1.Sierpinska(1985)による極限の認識論的障害を捉える枠組み

この枠組みにみられる障害のグループに対して，Sierpinska によって特定された認識論的障害は，主に5つの障害のグループ，すなわちⅠ.「無限への恐怖」，Ⅱ.「関数の概念に関連付けられる障害」，Ⅲ.「幾何学的障害」，Ⅳ.「論理的障害」，Ⅴ.「記号の障害」に特色付けられている。

Ⅰ.「無限への恐怖」として特徴付けられた認識論的障害のグループの特徴としては，無限集合の受諾に至るまでに数学史において存在した，無限の概念に関する認識論的障害をみることができる。「関数の概念に関連付けられる障害」として特徴付けられる極限の認識論的障害のグループの中に，関数の概念の発達と関連した極限の概念に対する障害をみてとることができる。Sierpinska が幾何学的障害として特徴付けた認識論的障害の中には，幾何学的な対象から離れて数そのものに還元されない極限の概念をみることができる。その自然言語と論理的な厳密性の差異を，Sierpinska が論理的障害として特徴付けた障害の中にみることができる。記号に関する極限の認識論的障害を，Sierpinska が記号の障害として特徴付けた障害の中にみることができる。

また，Sierpinska（1987）は，1985 年の論文において自身が提案した極限の認識論的障害の枠組みを，教育の文脈に照らし合わせ，修正を行っている。1987 年に修正された極限の認識論的障害をとらえる枠組みは，以下のように示される。なお，それぞれの障害に付随している番号は，Sierpinska が 1985 年において特定した認識論的障害の番号を示しており，Sierpinska 自身によって記述されたものである。

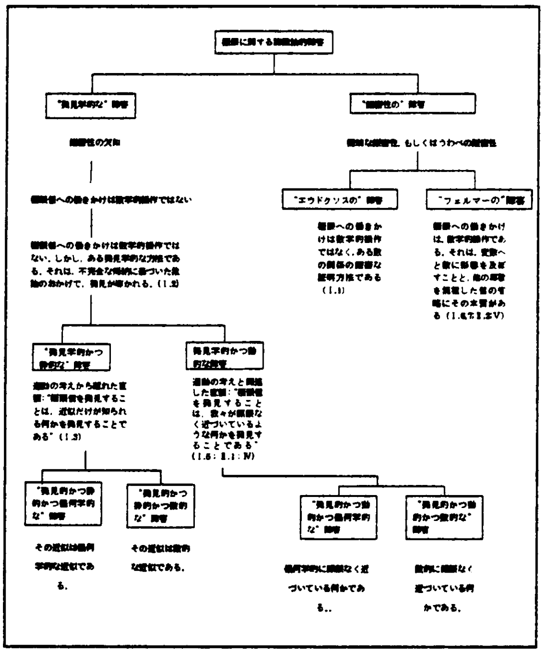


表 2.Sierpinska(1987)による極限の認識論的障害を捉える枠組み

Sierpinska は，「認識論的障害の二重性の性質の観点から配列し直した」と述べ，主に，発見学的障害と厳密性に関する障害，発見学的静的な障害と発見学的動的な障害，幾何学的障害と数的な障害といった3つの観点から，1985 年において自身が特定した障害を教育の文脈上で整理している。

Sierpinska の指摘により，第 1 章において本研究が設定した極限の理解について考察すると，本研究における極限の理解を達成するためには，極

限の認識論的障害の克服が必要不可欠であり，生徒たちによって極限の認識論的障害を克服していくための学習指導が必要となることがわかる。すなわち，極限の理解に向けて極限の認識論的障害に生徒たちが直面し，生徒たちが極限の認識論的障害を克服していくことをねらいとした学習指導の実現が必要となることが示唆される。

Sierpinska による極限の認識論的障害に関する研究の特徴とその価値を整理すると，次の3点があげられる。まず1点目に極限の認識論的障害を具体的に捉える枠組みによって具体的に極限の認識論的障害を捉えることができる点にある。枠組みを用いて具体例を検証することによって，その具体例においてどの場面でどのようにして極限の認識論的障害が存在するのかを明らかにすることができるため，極限の理解を目指した指導に対して教師側が認識論的障害を捉え生徒たちにその克服を意図できるようになるという点で有効であると考える。

2点目として，極限の認識論的障害を顕在化させ指導の中で生徒たちに認識論的障害に直面させる工夫として，視覚的な提示と計算機の役割を示している点である。極限の認識論的障害を捉えることのみならず，指導の中でいかにしてそれを扱うのかについての示唆を与えるという点で有効であると考える。

3点目として，克服に対して，4つの概念に着目した視点を与えていることである。認識論的障害の克服に対して，生徒たちはもともと所有しうる理解の方法についての地位を変化させる必要があるために，特に4つの概念についての障害に気づき，従来の理解の方法の地位を変化させることを示唆する Sierpinska の指摘は，克服に向けての具体的な視点を与えるという点で価値あるものとして考えられる。

したがって，これらの示唆を本研究において極限の理解を目指した学習指導に対する有効な示唆としてとらえることができると考える。

しかし，Sierpinska による極限の認識論的障害を捉える枠組みは，数学史に基づいて特定された枠組みであるために，学校数学の中で現行の教育課程に対して対象とされていない内容をも含んだ形式となるために，より簡潔で明確な枠組みを構築する必要があることも示唆される点であると考える。

また，極限の学習指導において扱われる内容は接線の方程式を求める問題場面だけではない。そのため，Sierpinska が扱った接戦の方程式を求める具体例ではない他の具体例についてもさらに検証し，極限の認識論的障害の克服の視点から見直した際の具体例を増やしていくこととその克服についての学習指導の課題を探求する必要性があることも示唆される点であると考える。

5. 極限の学習指導における認識論的障害とその克服

①高等学校数学科における極限の認識論的障害を捉える枠組み

1985 年の極限の認識論的障害を捉える枠組みは，教育の文脈においていくつか類似した性質をもつ障害が存在していること，高等学校数学科において対象とされる障害がすべての認識論的障害であるというわけではないことが問題点としてあげられうる。

Sierpinska による 1985 年における枠組みの特徴として，1つ1つの極限の認識論的障害が分けて位置づけられているため，どの場面でどのようにして，極限の認識論的障害が存在するのかが，明確に捉えやすいという特徴がある。しかし，その一方で，非常に多様な側面をもつため，教育の文脈においてはいくつか類似した性質をもつ認識論的障害が存在するという欠点もまた，存在していると考えられる。

1987 年のおける枠組みの特徴としては，教育の文脈によって整理されているため，それぞれの認識論的障害の区別が明確にされており，その位置づけが明確にされている特徴がある。また，極限の認識論的障害の源となる4つの障害に対してそ

の分類がなされている特徴がある。克服に向けての４つの概念に着目する視点や，極限の認識論的障害がそれぞれどのような特徴をもちうるかという点に対しては，1987年の枠組みの有効性がみてとることができる。

しかし，その一方で，フェルマーの障害としてまとめられている障害の中には，Ⅰ．6　Ⅰ．7―代数的障害―，Ⅱ.2―関数と関連付けられた障害―，Ⅴ―記号の障害―という多様な側面を持つ極限の認識論的障害が存在している点，また問題場面によって分類され，幾何学的対象と数的な対象に対する極限の認識論的障害としてまとめられているため，Ⅲ―幾何学的障害―それ自身を捉えることができない点がその欠点として，存在すると考えられる。すなわち，１つ１つの認識論的障害を詳細に捉えるためには，分析の枠組みとして有効に適応することができないという欠点もまた存在すると考えられる。

具体的な事例の中に存在する極限の認識論的障害を捉えるためには，１つ１つの極限の認識論的障害が具体的に特定され，それぞれに対してどのような克服が生徒たちに求められるのかが明確にされることがまず重視されると考える。そのように考えたときに，1985年における極限の認識論的障害を捉える枠組みを選択することが望ましい。

さらに，1985年においてSierpinskaによって提案された分析の枠組みを選択するとしても，その枠組みをもとに，どの障害が高等学校数学科において対象とされるのかをさらに吟味していくことによって，分析の枠組みを改良できる。したがって，それらの問題点を改良するという視点をもち，極限の認識論的障害を捉える枠組みを構築し，次のような枠組みが高等学校数学科における極限の認識論的障害を捉える枠組みとして考えられる。

A：*無限への恐怖*

A.1：*近似値の探求*：近似による極限。部分的な数列の項と項の間の関係に問題の主眼がおかれる

A.2：*物質的な障害*：伴って変化する２つの変数の変化に対して，その変化の様相が物質的な運動における変化と差がない

A.3：*形式的な処理による正当化*：：式の中の一定のアルゴリズムの利用による意味の欠落

A.4：*有限の性質の移行*：無限大の記号に対して，有限の大きさと同じ扱いを適応する

B：*関数の概念と関連付けられた障害*

B.1：*関数それ自身の性質による障害*：関数とは，解析的な表現，すなわち方程式である

B.2：*上限・下限と極限との識別*：値の集合{0，1，2，3}と関数としての数列0，1，2，3…との差がない

C：*幾何学的障害*：幾何学的な対象の変化に対して，幾何学的な対象の大きさ同士の差が着目され，数そのものの差が表面化されない

D：*記号の障害*：極限の記号 lim と等号記号＝との差がない

表2.高等学校数学科における極限の認識論的障害を捉える枠組み

②曲線で囲まれた図形の求積場面における分析

分析の枠組みとして，先に示した高等学校数学科における極限の認識論的障害を捉える枠組みを用いて，Sierpinskaによる接線の方程式を求める場面とは異なった具体例として，曲線で囲まれた図形の求積場面に焦点を当て分析を行う。

問題場面として，「$0 \leq x \leq 3$において，$y=x^2$とx軸によって囲まれる面積の値を求めよ」といった問題場面を考えることとする。

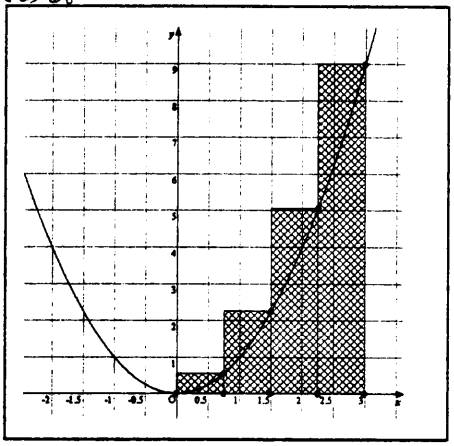
B.1：関数それ自身の性質による障害

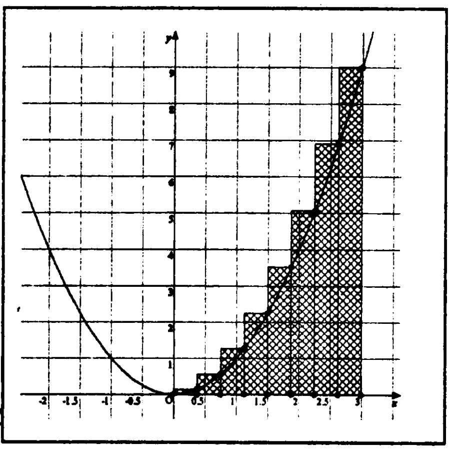
このとき，関数$y=x^2$に対して，ある値に対してある値が存在することやどのような値か知ることのみが可能である状態が想定される。例えば，“$y=x^2$に３を代入して得られる結果は９であるから求めるべき値は９である”，“$y=x^2$に０を代

入して得られる結果は0であるから求めるべき値は0である”などが考えられる。

右図のように関数 $y=x^2$ がグラフ的な表現で表されるとともに，求めるべき対象となる面積の図形が特定される。

教師側から，曲線下の面積がどのように構成されていくのかという様子を以下のような視覚的な方法のみによる提示として示し，長方形の面積の分割に関して x 軸の区間[0, 3]を4分割，8分割，16分割・・・・(以下には，4分割，8分割のときのみ提示。)と分割していくことまでは口頭で伝えないようにして示す。このような視覚的な提示は，Sierpinska の極限の認識論的障害の特定の研究の中における実験にも見られた幾何学的な障害を顕在化させるための問題場面の工夫のためである。





幾何学的障害では，面積同士の差のみ，長方形の面積の和の変化と曲線下の面積のみが着目されてしまうことがその障害の性質となる。つまり，面積の変化の背後にある，長方形の面積の和が増えていくことと対応させて，増えていく長方形の面積の数や x 軸の区間[0, 3]の分割数に着目されないことが考えられる。

例えば，“階段の面積がどんどん曲線で囲まれた面積に近づいていく”，“曲線で囲まれた面積からはみでている部分が小さくなっていく”，“細かい階段状の面積と曲線で囲まれた図形の面積がほとんど等しい”といった反応が考えられる。これらの反応は，面積の変化と対応付けて，x 軸の区間[0, 3]の分割数や長方形の数の変化に着目されていない反応として考えられる。

B.2：上限・下限と極限との識別

このとき，B.2:上限・下限と極限との識別では，あくまで長方形の面積の和のいくつかの数値に対して，値の集まりとして解釈されうることが，その障害の性質である。例えば，この表の中の，長方形の面積の和の数値に対して，面積の値の集まり{27,16.875,14,12.656,11.88,11.375,11.020}として解釈し，これ以上の面積の和を探求しない場合である。この場合，長方形の面積がその値の集合の上限として，すなわち 11 として，求められてしまう反応がその例としてあげられる。

A.1：近似値の探求

A.1ー近似値の探求―では，あくまで表の中にあるいくつかの数値にのみ着目されることがその性質としてあげられる。つまり，求められた数値の意味があくまで近似値として意味づけられている場合である。

例えば，“x がある大きな値をとるとき，面積の値は9に近い値をとる。そのため，面積の値は9である”として，9の値が説明される場合などが

その反応として考えられる。つまり，発見された数値９に対して，この分割数をさらにふやしていく場合にその値がどのように変化していくのかついてまで意識されない場合である。

D：記号の障害

生徒たちの中には，これまでの学習における＝の使い方をそのまま用いてしまい，値が発見されたことによって，面積は９と等しいと考えてしまうことも想定される。

A.3：物質的な障害

A.3－物質的障害―は，さらに分割数を増やしていった場合に，面積の変化が，あくまで何らかの物質的な運動から切り離せずに考えてしまうことにその障害の性質がある。例えば，“面積の値は分割数を増やしていくことによって９に近づいていく。そして，いつか面積は９と一致する。”や“面積の値は９に限りなく近づいていき，９に近い値はとりうるが，９ではない。したがって，面積を正確な値として９と認めない。”などがその反応例として考えられる。

ここで，発見された数値９がどのような数値であるのかについて，さらにその意味を尋ねる発問をしていく。そのような発問によって，その値に達することはないが限りなく近づけることができる値として面積の正確な値を９として認識させる反応を取り上げていくためである。

A.5：有限の性質の移行

A.5：有限の性質の移行では，量としての無限に対する記号∞に対して，有限の大きさを表す文字としての扱いを示すことが，その障害の性質である。

したがって，以上の曲線によって囲まれた図形の求積場面において，現れうる認識論的障害は，以下の７点にあるとまとめられる。

B.1：関数それ自身の性質による障害
C：幾何学的障害
B.2：上限・下限と極限との識別
A.1：近似値の探求
D：記号の障害
A.2：物質的な障害
A.4：有限の性質の移行

③極限の認識論的障害の克服に向けた極限の学習指導

幾何学的障害に対して，幾何学的障害の克服は，幾何学的な対象の変化を数へ還元させるという点で重要となる。Sierpinska や Cornu が指摘するように，取り尽くし法から極限へ至るまでには2000年以上の年月の隔たりが存在しており，幾何学的な対象を数そのものへと還元することには，大きな困難となることが考えられるのである。

より直接的に幾何学的障害の克服を意図した学習指導に向けて，１つの視点となりうることは，極限の学習指導の以前に，教師側があえて幾何学的な対象の変化に対して近似的に解を求める活動を意図して指導を構築することが重要であると考える。

なぜならば，長方形の面積の和に対する近似値を求める活動をあらかじめ意図的に指導の中に取り入れておくことによって，長方形の数，すなわち区間の分割数の変化と長方形の面積の和の対応関係を捉える視点を養うことができるとともに，曲線によって囲まれた図形を長方形の面積によって捉えようとする視点を養うことができると考えられるからである。

接線の方程式に対しても，同様に考えることが出来る。厳密に接線の方程式に対する解を求めようとすれば極限を理解する必要があるが，近似的に解を求めることにねらいをとどめて接線の方程式を求めていくことを意図することによって，

割線の変化に対してどの変数に着目するのかを認識できるとともに，割線の変化に対して適切に解釈する視点を育成することができると考えられるからである。生徒たちがより早い段階で，計算機を用いることになれている必要があると考えられる。近似的に解を求めていく指導に対して，そのような計算機を与える状況を生み出して指導を構築する必要性があると考えられる。

物質的な障害に対して，無限の概念がその克服に向けて重要となることを，Sierpinska は指摘している。すなわち，無限は存在しない，無限は潜在的にのみ存在するといった無限に対する捉え方が，障害として機能しうることを指摘している。

無限集合を捉えることは，現実的な世界における直観にそわない矛盾が生じるため，理解することが困難であることは，確かであると考える。しかし，極限の認識論的障害の克服に向けては，無限集合が内在されている学習内容を意図的に扱っていくことが必要になると考える。なぜなら，吉川が指摘するように，無限集合に対しては，直観的には沿わない事実を受け入れてなじんでいくことが重要であり，早い段階で積極的に扱うことが重要であると考えられるからである。

そのため，長さの異なった線分における点の集合をどのように捉えるか，大きさの異なった円における点の集合をどのように捉えるかなどといった無限集合を内在している題材を直接的に指導の中で取り上げていくことが必要となると考える。また，無限の概念自体を指導していく際に，どのように指導を体系づけるかといった点を明らかにしていく必要があると考えられる。

また，Sierpinska(1994)は次のように述べる。

> もし数学の中で“極限の概念”についてときどき私たちが話すならば，いくつかの変化することが我々が望むほど近づかせることができるということの一般的な考え方を参照する。そして，教えることに関して，初めの段階で私たちの生徒がつかんでほしいと願うものは，しばしばこの理解の方法であり，この“極限の一般的な考え方”である。私たちは，“極限”という名前を与える前に，彼らにこの考え方を自分自身で発見するよう望む。・・中略・・しかし，もちろん私たちは，生徒が極限という用語をより意識するようになってもらい，その数学的意味をより正確に把握してもらえるように願う。(p.42)

すなわち，Sierpinska は，初期の学習の段階において，極限という名前や記号を生徒たちに把握させるのではなく，何より重要なことは，我々が望むほど近づけることができるという，一般的な極限の考え方を把握させることを意識した指導であるべきであると主張している。その意図として，極限の学習においては極限の認識論的障害を克服させ，考え方を把握することがまず何より重要であることが主張されていると考えられる。

そのように捉えれば，本研究において具体的事例として検討した曲線に囲まれた図形の求積場面も，接線の方程式を求める問題場面も，どちらも極限の認識論的障害を克服させることが意図されて扱われるべきであると考える。

したがって，それぞれ微分，積分として分割された指導は，極限の十分な理解の前に，計算や記号の扱いを生み出すと考えられる。記号や計算を取り扱った代数的な積分，微分の扱い方よりもまず，十分に接線の方程式に関する問題場面や曲線によって囲まれた図形の求積場面，また数列の極限などにおいて，極限の認識論的障害を克服させる一連の授業を構築していくことは，重要な事柄であるということが示唆される。

6. 研究のまとめと今後の課題

本研究の目的は，Sierpinska による極限の認識論的障害の特定に関する研究を理論的に考察し，それをもとに現行の高等学校数学科における極限の認識論的障害を捉える枠組みを構築するとともに，新たな具体例としての曲線に囲まれた図

形の求積場面の検証とその克服に向けての指導に対する示唆を得ることであった。その結果，高等学校数学科を対象とした極限の認識論的障害を捉える枠組みを構築し，曲線に囲まれた図形の求積場面の具体例における極限の認識論的障害を，主に，関数それ自身の性質による障害，幾何学的障害，上限・下限と極限との識別，近似値の探求，記号の障害，物質的な障害，有限の性質の移行といった，7つにみられることが示された。また，その克服に向けての示唆として，幾何学的な対象の変化に対して近似的に解を求める活動を意図した指導の必要性，無限集合として捉える視点を育成することを意図した指導の必要性，極限の認識論的障害を克服させる一連の授業を構築することの必要性が，認識論的障害の克服に向けた極限の学習指導に対して重視されるべき示唆として得られた。

今後の課題としてあげられることは，本研究において検証された曲線によって囲まれた図形の求積場面に対する実際の生徒たちの反応を分析すること，また，幾何学的な対象の変化に対して近似的に解を求める活動を意図した指導をより詳細に検討していくことである。

主な引用・参考文献

A.Sierpinska(1985).Obstacle epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques.vol.6(1)*. pp.5- 67.

A.Sierpinska(1987).Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limit. *Educational Studies in Mathematics 18(4).pp.371-397.*

A.Sierpinska(1990a).EPISTEMOLOGICAL OBSTACLE & UNDERSTANDING—TWO USEFUL CATEGORIES OF THOUGHT FOR RESEARCH INTO TEACHING AND LEARNING MATHEMATICS—.*Proceedings of the 2nd. Bratislava International Symposium on Mathematics Education*.pp.5-20.

A.Sierpinska(1990b).Some remark on understanding in mathematics.*For the Learning of Mathematics. 12.3*.pp.24-36.

A.Sierpinska(1994).Understanding in Mathematics.The Falmer Press.

B.Cornu(1991).Limit.In D.Tall(ed) *Advanced Mathematical Thinking*. pp.153- 166

カッツ 訳中根美知代ほか(2005).数学の歴史.共立出版.

吉川行雄(2000).微分・積分.杉山吉茂ほか編.*講座 教科教育 数学科教育 中学・高校*.学文社.pp.136-147.

溝口達也(1995). 認識論的障害の克服過程の記述カテゴリーによる特徴づけ：極限概念を事例として.*日本数学教育学会誌 臨時増刊.数学教育学論究 .63*.pp.27-47.

(とやま　こうへい
金沢大学教育学部附属高等学校
〒921-8105 石川県金沢市平和町 1-1-15)