東京学芸大学附属高等学校紀要　51　pp.17～24，2013

極方程式との関係を意識し図形を考察する教材の開発

Development of teaching materials to help students examine figures considering polar equations

数学科　佐　藤　亮　太

<キーワード>　極座標　　極方程式　　図形

1．本稿の目的

高等学校学習指導要領において，極座標は，1961 年の科目「応用数学」において直交座標の他の曲線の表わし方として位置付けられていた。しかし，1972 年に内容の精選ということで，学習内容から外れたが，1990 年，1999 年の科目「数学C」において，1961 年同様，曲線の表し方として位置付けられ，2009 年の科目「数学Ⅲ」にも位置付けられている。平面上の曲線の極座標による表示の学習内容は，「極座標の意味及び曲線が極方程式で表されることを理解し，それらを事象の考察に活用すること」（文部科学省，2009，p.37）であり，以下のように述べられている。

「平面上の点Pは，定点Oからの距離rと，Oを端点とするあらかじめ定められた半直線とOPとのなす角θを用いても定めることができる。ここでは，極座標の意味，極座標と直交座標の関係について理解させるとともに，コンピュータなどを用いて極方程式で表された曲線をかき，曲線と極方程式との関係を理解させる。

極座標や極方程式の意味を理解させるために，例えば，アルキメデスの渦巻線$r=\theta$などについて対応表にしたがって点をプロットしてかかせたり，楕円などを離心率を用いて極方程式で表したりする。また，極座標（r，θ）と直交座標（x，y）の関係$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$についても理解させる。」
（文部科学省，2009，p.38）

このように，高等学校学習指導要領において，極座標は，学習内容に位置付けられたり外れたりしてきた。しかし，その内容は，1990 年以降「コンピュータなどを用いて」が加わっただけで，変わりはない。

高校数学における極座標を学習する意義はなんだろうか。2次曲線を離心率で表すとき，極座標を用いれば簡単に表すことができる等，曲線を簡単な方程式で表すことができることは極座標のよさであり，極座標を学習する意義であろう。この他に，筆者は，直交座標のよさを認識させることも極座標を学習する意義としたい。極座標のよさ及び直交座標のよさを認識させるために，極方程式とその極方程式が表す図形との関係を意識しながら図形を考察する一連の教材を提案する。

2．提案する一連の教材

課題1　$r=\theta$である点を集めよう。

課題1の目的は，実際に点をプロットしてかかせることによって，極座標と極方程式の意味を理解させることである。

この図形（図1）は，アルキメデスの渦巻線であり，蚊取り線香やアンモナイトの貝殻にみられる曲線である。図1（上）を遠くから見た図が，図1（下）である。なぜ蚊取り線香はこの形なのかを考えると面白い。蚊取り線香が渦巻線であることは，渦巻線が，極方程式から明らかなように，幅が一定（2π）であるという特徴を持っているからであろう。幅が一定であるからこそ，2つの蚊取り線香を重ねられるように設計できる。課題1を通して，極座標と極方程式を用いれば，身近な曲線を表すことができることと，そのよさを実感させたい。

ここでは$\theta \geqq 0$の場合，すなわち$r \geqq 0$の場合を考えているが，$r<0$の場合は課題2の後に考えることを想定している。しかし，生徒から$r<0$の場合のことについて出てくれば，考えてもよいだろう。また，ここで（2，2）の点をとる等で，弧度法を確認するとよいだろう。

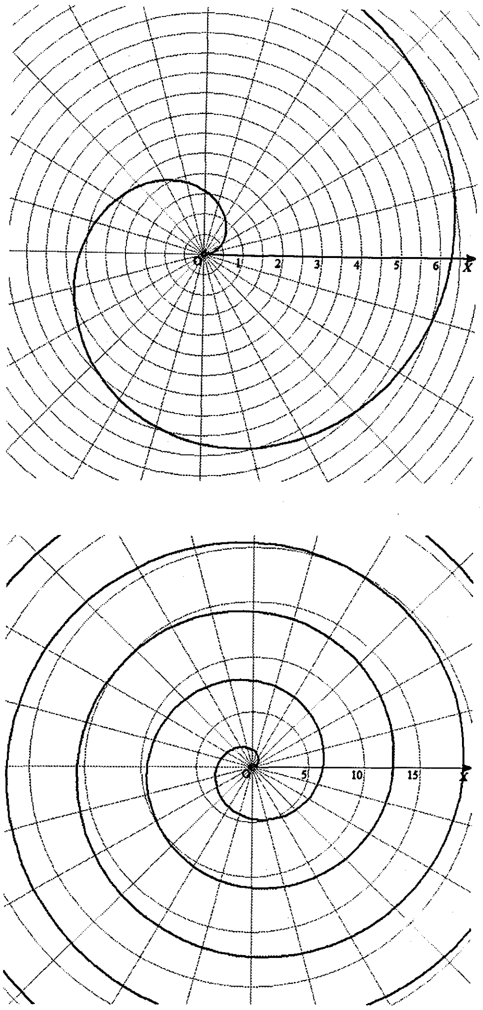


図1.　アルキメデスの渦巻線

課題2　$r = 2\cos\theta$である点を集めよう。

課題2は，課題1に引き続き，rとθの対応表にしたがって点をプロットしてかかせる。そうすると，$0 \leqq \theta \leqq \frac{6}{12}\pi$のときはよいが，$\frac{6}{12}\pi < \theta < \frac{18}{12}\pi$のとき，$r < 0$となり，プロットできず困る。

表1.　$r = 2\cos\theta$の対応表

θ	0	$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{2}{12}\pi$	$\frac{3}{12}\pi$	$\frac{4}{12}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$
r	2	1.93	1.73	1.41	1	0.52

$\frac{6}{12}\pi$	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{8}{12}\pi$	$\frac{9}{12}\pi$	$\frac{10}{12}\pi$	$\frac{11}{12}\pi$	$\frac{12}{12}\pi$
0	-0.52	-1	-1.41	-1.73	-1.93	-2

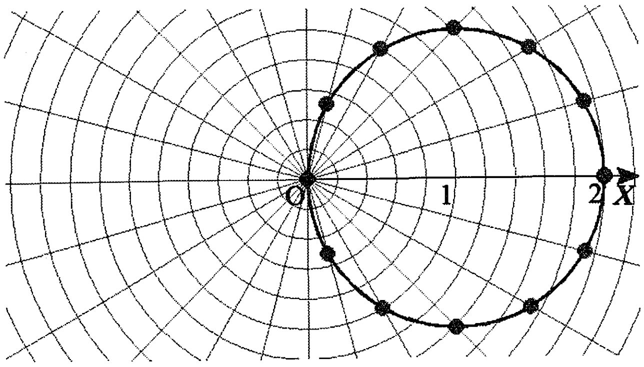


図2－1.　円

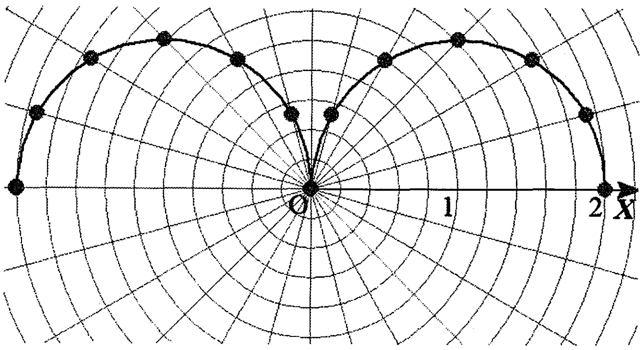


図2－2.　2つの半円

$r < 0$のときはどうするかと問うと，上の2通りの解答が出てくることを期待する（図2)。理由を聞くと，図2－1は，rが負であるので，向きが反対である点なのではないかという推測していた。すなわち，$r < 0$のとき，(r, θ)を$(-r, \theta + \pi)$に対応させるということである。対して，図2－2は，rは極からの長さなので，負の数はあり得ないので，絶対値を考えていた。すなわち，$r < 0$とき，(r, θ)を$(-r, \theta)$に対応させるということである。

そこで，まず，共通している$0 \leqq \theta \leqq \frac{6}{12}\pi$は，円と予想できるが，円であろうか。この解決の方法として以下の3つが考えられる。

① 直交座標になおす

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$を用いて

$$r = 2\cos\theta$$

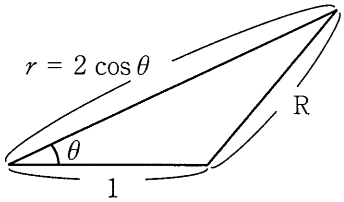
$$r^2 = 2r\cos\theta$$

$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

よって，中心（1，0）半径1の円

② （1, 0）との距離R

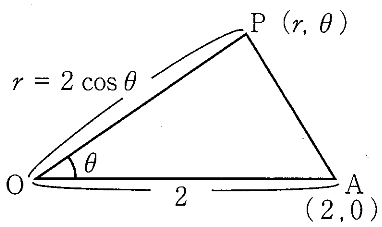


余弦定理より

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^2 &= 1^2 + r^2 - 2r\cos\theta \\ &= 1^2 + r^2 - r^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって，中心（1, 0）半径1の円

③ 円周角の定理の逆



図より，∠OPA は直角であるので，
円周角の定理の逆より，
P は OA を直径とする円周上の点である。

この課題を通して，特に②③を通して，極方程式と図形との関係を意識させたい。また，①より，極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) との関係 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ がわかる。これを基に，$\frac{6}{12}\pi < \theta < \frac{18}{12}\pi$ のときを考える。$r < 0$ のときの場合も，極座標と直交座標との関係 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ を保存するように，極座標を拡張する。

$$x = r\cos\theta = -r\cdot -\cos\theta = -r\cos(\theta + \pi)$$
$$y = r\sin\theta = -r\cdot -\sin\theta = -r\sin(\theta + \pi)$$

そうすると，$r < 0$ のとき，(r, θ) を $(-r, \theta + \pi)$ に対応させることには妥当性がある。したがって，$r < 0$ のとき，(r, θ) は $(-r, \theta + \pi)$ の点を表すことと定義し，極座標を拡張する。このことにより，極座標と直交座標との関係をよりいっそう意識させることができるだろう。教科書では，$r < 0$ のときの極座標の定義が書かれているのみで，その理由は書かれていない。これでは，定義の妥当性も実感しにくいだろうし，極座標と直交座標との関係を意識させる機会を逃しているだろう。

以上をまとめると，課題2の目的は，以下の3つである：①極座標を拡張すること；②極座標と直交座標との関係の理解を深めること；③極座標と図形との関係を意識すること。

そして，k を定数として，$r = f(\theta)$ が表す図形と，$r = k\cdot f(\theta)$ や $r = f(\theta - k)$ が表す図形の関係を考察した後，$r = f(\theta) + k$ が表す図形との関係を考えるために次の課題3に取り組む。

課題3　$r = 2\cos\theta + 2$ である点を集めよう。

表2. $r = 2\cos\theta + 2$ の対応表

θ	0	$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{2}{12}\pi$	$\frac{3}{12}\pi$	$\frac{4}{12}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$
r	4	3.93	3.73	3.41	3	2.52

$\frac{6}{12}\pi$	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{8}{12}\pi$	$\frac{9}{12}\pi$	$\frac{10}{12}\pi$	$\frac{11}{12}\pi$
2	1.48	1	0.59	0.27	0.07

$\frac{12}{12}\pi$	$\frac{13}{12}\pi$	$\frac{14}{12}\pi$	$\frac{15}{12}\pi$	$\frac{16}{12}\pi$	$\frac{17}{12}\pi$
0	0.07	0.27	0.57	1	1.48

$\frac{18}{12}\pi$	$\frac{19}{12}\pi$	$\frac{20}{12}\pi$	$\frac{21}{12}\pi$	$\frac{22}{12}\pi$	$\frac{23}{12}\pi$	$\frac{24}{12}\pi$
2	2.52	3	3.41	3.73	3.93	4

課題2において作った表（表1）やかいた図（図2−1）をもとに，対応表をつくり図示すると図3−1のようになる。この図形は，既習であれば，カージオイド（cardioid，心臓形）でないだろうかと予想することができる。

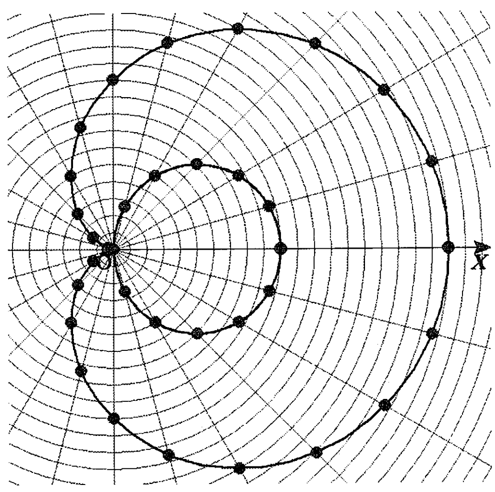


図3−1. $r = 2\cos\theta + 2$ と $r = 2\cos\theta$

カージオイドは，外サイクロイドの特別な場合であり，1つの円の外側に，等しい大きさの円を滑らせずに転がしたときのある1点の軌跡である。図3−2は，中心(1, 0)で半径1の定円Aの外側に，円Aと等しい大きさの円Bをα転がした図である。

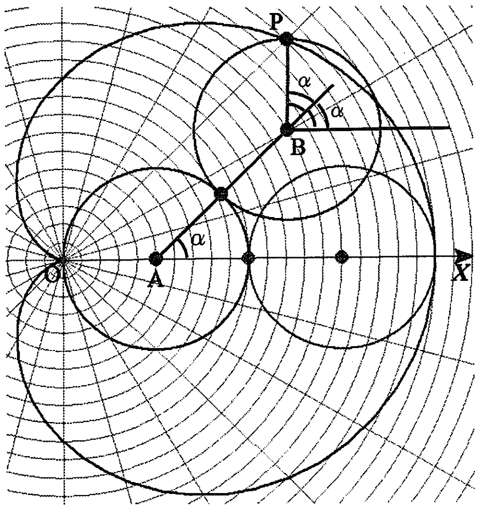


図3−2.　カージオイド

このとき直交座標でのBの座標は（$1 + 2\cos\alpha$, $2\sin\alpha$）であり，Pの座標は（$1 + 2\cos\alpha + \cos 2\alpha$, $2\sin\alpha + \sin 2\alpha$）であるので，媒介変数$\alpha$でカージオイドを媒介変数表示すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + 2\cos\alpha + \cos 2\alpha \\
&= 1 + 2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 \\
&= 2\cos\alpha(\cos\alpha + 1) \\
y &= 2\sin\alpha + \sin 2\alpha \\
&= 2\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha \\
&= 2\sin\alpha(\cos\alpha + 1)
\end{aligned}
$$

$r = 2(\cos\theta + 1)$はカージオイドであろうか。上のカージオイドを極座標で表すと，

$$
\begin{cases}
r\cos\theta = 2\cos\alpha(\cos\alpha + 1) \\
r\sin\theta = 2\sin\alpha(\cos\alpha + 1)
\end{cases}
$$

両辺足して

$$r(\sin\theta + \cos\theta) = 2(\cos\alpha + 1)(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

これを$r = 2$（$\cos\theta + 1$）と比較すると，また，図からも$\alpha = \theta$と予想できる。$\triangle OAB \equiv \triangle PBA$（$OA = PB$, $AB = BA$, $\angle OAB = \angle PBA$），ABに対してOとPは同じ側にあるので，OP//ABである。したがって，$\alpha = \theta$が示され，$r = 2$（$\cos\theta + 1$）はカージオイドであることが示される。

円$r = 2\cos\theta$とカージオイド$r = 2\cos\theta + 2$は，極方程式から明らかであるが，等しいθに対して，円上の点をP，カージオイド上の点をQとすると，線分PQの長さは常に2である。つまり，θを連続的に変化させたときPQに着目すると，長さ2の線分が動いてみえる（図4−1）。この線分はどのように動いているかを明らかにするために，線分の中点に着目してみる。

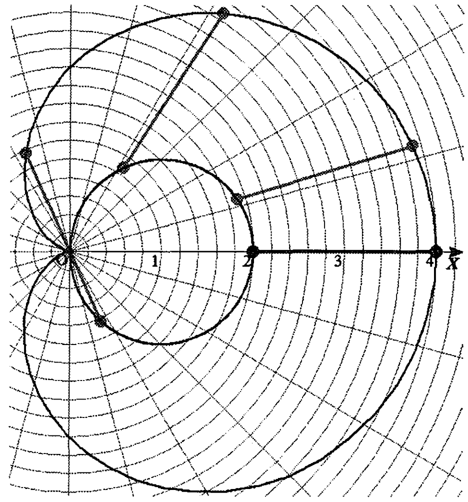


図4−1.　円とカージオイドの間の線分

課題4　この線分の中点の軌跡の極方程式を求めよう。

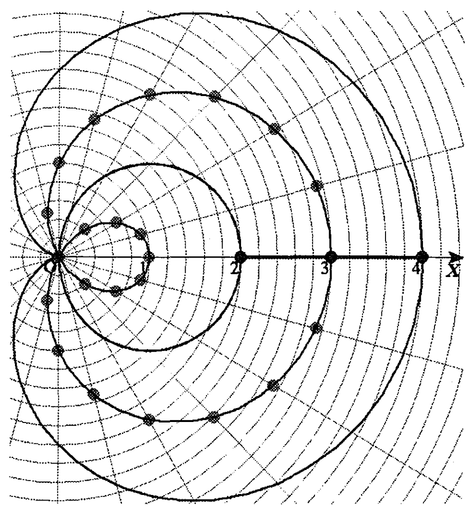


図4−2.　円とカージオイドの間の線分の中点の軌跡

線分の中点の軌跡をかくと，図4−2のようになる。その極方程式として次の2つの方法が出た。1つ目は，偏角θのときのrは，円の$2\cos\theta$とカージオイドの$2\cos\theta+2$の平均であるので，求める極方程式は$r=2\cos\theta+1$であるという方法である。2つ目は，円の外側と内側に分け，外側は極からの長さが円より1大きいので$r=2\cos\theta+1$（曲線①とする），また，内側は円より1小さいので$r=2\cos\theta-1$（曲線②とする）であるという方法である。曲線①と②を，コンピュータを使って図示すると，同じ図形を示しているように見える。そこで，「曲線①と②は同じ図形なのか」という課題が生まれる。

曲線①上の点をP(r_1, θ_1)とすると，

$$r_1=2\cos\theta_1+1$$
$$-r_1=2\cos\theta_1-1$$
$$-r_1=2\cos(\theta_1+\pi)-1$$

よって，点$(-r_1, \theta_1+\pi)$は，曲線②の極方程式を満たすため，曲線②上の点である。一方で，点(r_1, θ_1)と点$(-r_1, \theta_1+\pi)$は同じ点を表す。したがって，曲線①上の点は曲線②上でもある。逆も同様であるので，曲線①と曲線②は同じ図形である。

$r=2\cos\theta+1$が表す図形を，リマソンという。リマソンを使えば，角の三等分を作図できる。どうやって作図するかを考えることは面白い。そこで，図4−2を使って，角の三等分を作図せよという課題を出した。生徒の解答は次であった（図4−3）。

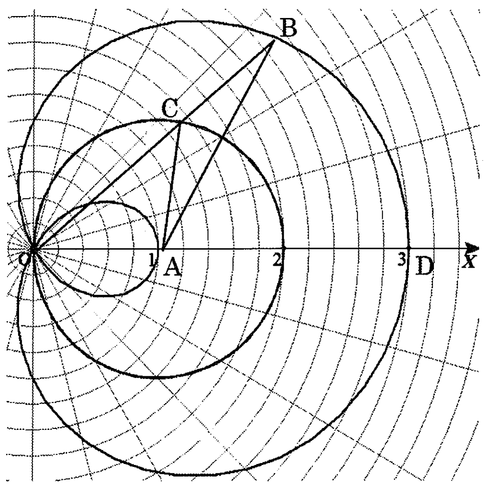


図4−3. リマソンと角の三等分

リマソン上にBをとり，$\angle ABO=\alpha$とする。OA = AC = CB（= 1）であるので，△ACBは二等辺三角形。よって，$\angle CAB=\alpha$であるので，$\angle ACO=\angle ABO+\angle CAB=2\alpha$。また，△OACも二等辺三角形であるので，$\angle COA=\angle ACO=2\alpha$。したがって，$\angle DAB=\angle COA+\angle ABO=2\alpha+\alpha=3\alpha$。ゆえに，$\angle DAB=3\angle ABO$であるので，∠DABの三等分が作図できた。

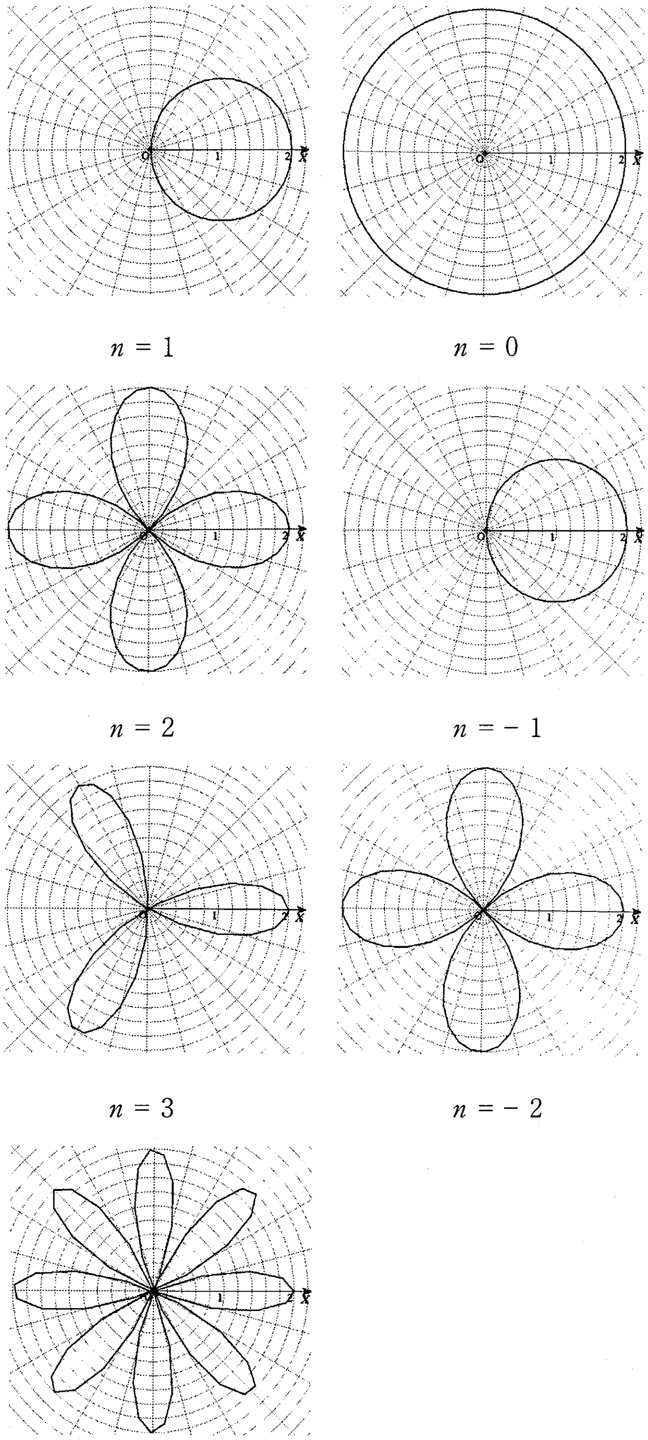
ここで，直交座標と極座標の違いを述べる。直交座標では，$y=f(x)$の右辺に定数kを加えた方程式は，y軸方向にkだけ平行移動した図形を表し，図形は合同である。極座標では，円$r=2\cos\theta$の極方程式の右辺に2を加えた極方程式は，カージオイド$r=2\cos\theta+2$を表し，また，1を加えた極方程式は，リマソン$r=2\cos\theta+1$を表し，全く異なる図形のように感じる。しかし，意味は似ており，直交座標では，同じxに対して，yの値をk大きくしたもので，極座標では，同じθに対して，rの値を1または2大きくしたものということである。これは視点の違いで，直交座標の世界では，平行移動したものが方程式から仲間とみることができることに対して，極座標の世界では，円，カージオイド，リマソンを極方程式から仲間とみることができる[1]ことの違いであろうし，お互いのよさでもあろう。このことは，直交座標ではまとめて表しづらい2次曲線を，極座標ではきれいに表すことができることに効いているのだろう。また逆に，極座標の学習を通して，今までの直交座標のよさを改めて認識させたい。

さて，話は戻り，円$r=2\cos\theta$から始まり，右辺に定数を加えた極方程式が表す図形について考察してきた。次に，θの部分を変えてみて，$r=2\cos n\theta$（n：整数）が表す図形はどんな図形だろうか。これは，かいてみると図5−1のようになり，正葉曲線と言われる。次に，$r=2\cos\frac{\theta}{n}$（n：整数）が表す図形はどんな図形であろうか。かいてみると図5−2のようになり，$n=3$のときがリマソンのように見える。そこで次の課題が生まれる。

課題5　$r=2\cos\frac{\theta}{3}$はリマソンか。

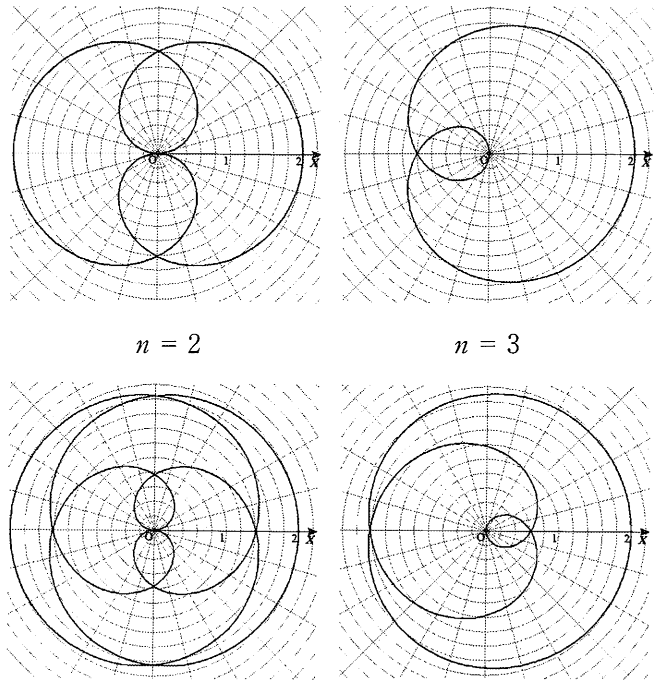
この課題を解決するために，リマソン$r=2\cos\theta+1$と$r=2\cos\frac{\theta}{3}$を並べてかいてみると下（図5−3）のようになり，リマソン$r=2\cos\theta+1$を左に1平行移動すれば，$r=2\cos\frac{\theta}{3}$と重なるのではないかと予想できる。

[1]極方程式$r=a\cos\theta+b$が表す図形を，パスカルの蝸牛形という。$b=0$のとき円を表し，$a=b$のときカージオイドを表し，$a=2b$のときリマソンを表す。



$n = 1$　$n = 0$　$n = 2$　$n = -1$　$n = 3$　$n = -2$　$n = 4$

図5−1.　$r = 2\cos n\theta$



$n = 2$　$n = 3$　$n = 4$　$n = 5$

図5−2.　$r = 2\cos\frac{\theta}{n}$

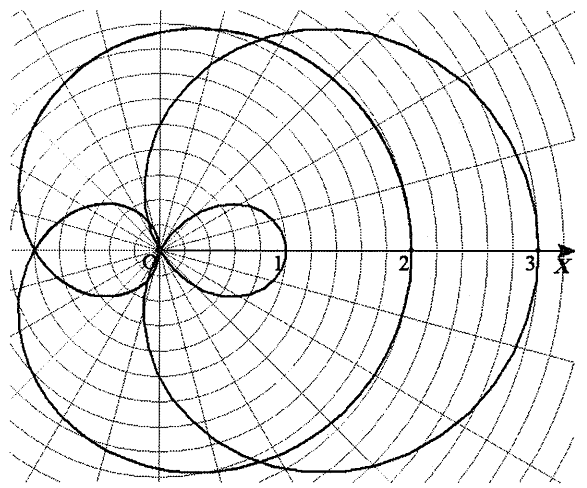


図5−3.　$r = 2\cos\frac{\theta}{3}$（左）と $r = 2\cos\theta + 1$（右）

点A（1，0），$r = 2\cos\frac{\theta}{3}$上の点C（$2\cos\alpha$，$3\alpha$）とし，OCに平行でAを通る直線とリマソンとの交点をBとする（図5−4)。OC // ABより，$\angle\mathrm{COB} = \angle\mathrm{ABO} = \angle\mathrm{XAB} \div 3 = \angle\mathrm{AOC} \div 3 = 3\alpha \div 3 = \alpha$。ゆえに，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{AOC} - \angle\mathrm{COB} = 3\alpha - \alpha = 2\alpha$であるので，リマソン上の点Bの極座標は（$2\cos 2\alpha + 1$，$2\alpha$）である。四角形OABCが平行四辺形であることを示す。OC // ABであるので，OC = ABを示せばよい。

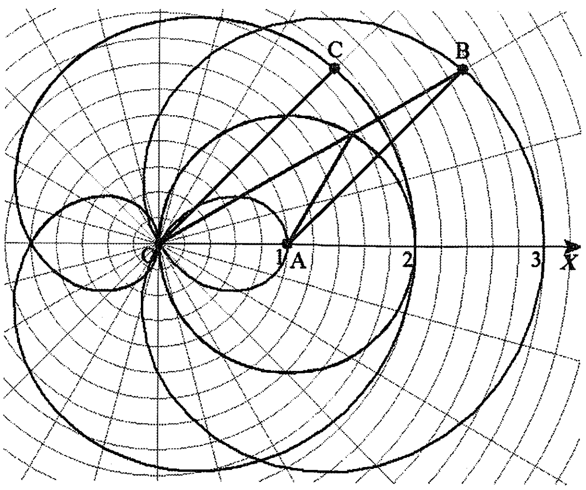


図5－4.　$r = 2\cos\frac{\theta}{3}$（左）と $r = 2\cos\theta + 1$（右）

△OABにおける余弦定理より，

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB$$
$$= 1^2 + (2\cos 2\alpha + 1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot (2\cos 2\alpha + 1)\cos 2\alpha$$
$$= 2\ (\cos 2\alpha + 1) = 2 \cdot 2\cos^2\alpha = \ (2\cos\alpha)^2$$

よって，$2\cos\theta \geqq 0$のとき，$AB = 2\cos\alpha$となり，$OC = AB$が示され，四角形OABCが平行四辺形であることが言える。$2\cos\alpha < 0$のときも同様である。よって，リマソン$r = 2\cos\theta + 1$を左に1平行移動すれば，$r = 2\cos\frac{\theta}{3}$と重なることが示され，$r = 2\cos\frac{\theta}{3}$もリマソンを表すことが示された。

この課題を通して，リマソンとその極方程式との関係についての理解を深める。

3. 本教材の教育的価値と今後の課題

本教材の教育的価値を述べる。

まず，上記の一連の課題の解決を通して，曲線と極方程式との関係について理解を深め，極座標についての理解を深めることができるとともに，極座標のよさの一つとして曲線を簡単な方程式で表すことができることを認識させることができると考える。

また，課題3～課題5を通して，直交座標において，$y = f(x)$ と $y = f(x) + k$（k：定数）が表す図形の関係は，軸方向に だけ平行移動した関係であるが，極座標においては，$r = f(\theta)$ と $r = f(\theta) + k$が表す図形はそうではないことから，平行移動が方程式上で読み取りやすいという直交座標のよさを認識することができるだろう。こうして，互いの座標のよさを認識できるのではないかと考える。

極座標を事象の考察に活用する教材の開発が，今後の課題である。

引用・参考文献

- 文部省（1961）高等学校学習指導要領解説　数学編，大日本図書
- 文部省（1972）高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編，大阪書籍
- 文部省（1979）高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編，実教出版
- 文部省（1990）高等学校学習指導要領解説　数学編
- 文部省（1999）高等学校学習指導要領解説　数学編
- 文部科学省（2009）高等学校学習指導要領解説　数学編