



Tokyo Gakugei University Repository

東京学芸大学リポジトリ

<http://ir.u-gakugei.ac.jp/>

Title	空間図形教材の開発に関する研究：投影図の活用に焦点を当てて(修士論文要約)
Author(s)	諸星, 雄大
Citation	学芸大数学教育研究(19): 121-130
Issue Date	2007
URL	http://hdl.handle.net/2309/70557
Publisher	東京学芸大学数学教育学科
Rights	

修士論文要約

空間図形教材の開発に関する研究
—投影図の活用に焦点を当てて—

諸星 雄大

本研究の目的は、図形に対する理解を、かくこと、構成すること、よむことによって促し、空間図形を2次元に落として連続的に表現させることを意図した教材の開発を行うことである。

本研究では、空間図形指導における学習活動を、「かく」「構成する」「よむ」の3つの過程が起る活動として特徴付けた。そして、生徒が図形を「かく」「構成する」「よむ」という活動を繰り返し行うことによって、2次元と3次元を関連付ける能力を高め、図形に対する理解を促すことにつながると価値付けた。この考えに基づいて開発した2つの教材において、投影図を用いることの必要性和、図形な動的な見方をすることの必然性を述べ、課題の設定、想定される授業の流れを構想した。

序章 研究の目的と方法

0.1 研究の目的

0.2 研究の方法

第1章 空間図形の理解における2次元表示の役割

1.1 2次元と3次元の関連付けの観点から見た空間図形の理解の実態

1.1.1 大規模調査から見出される空間図形の理解の実態

1.1.2 先行研究から見出される空間図形の理解の実態

1.1.3 本研究の問題意識

1.2 空間図形の理解を促すための視点の設定

1.2.1 空間図形の2次元表示に着目する意義

1.2.2 空間図形の理解における2次元表示の役割

第2章 中学校教科書における空間図形教材の問題分析

2.1 教科書の問題を分析する目的

2.2 教科書の問題分析の枠組みと方法

2.2.1 教科書の問題を分析する枠組みの構築

2.2.2 教科書の問題分析の対象と方法

2.3 教科書における空間図形教材の問題分析

第3章 空間図形の理解における投影図の役割

3.1 投影図に焦点を当てる意図

3.1.1 図学に見る投影図の機能

3.1.2 本研究で投影図に焦点を当てる意図

3.2 空間図形指導における投影図の取り扱い

とその問題点

3.3 投影図を利用することの価値

第4章 図形の動的な構成における投影図の活用

4.1 図形の動的な見方の役割とその概念規定

4.1.1 数学教育における図形の動的な見方の役割

4.1.2 図形の動的な見方の概念規定

4.2 図形の動的な構成に投影図を活用することの着想と方法

第5章 図形の動的な構成に投影図を活用する教材の開発

5.1 教材開発の方法

5.2 教材開発例1: 投影図を用いた回転体の連続的表現

5.2.1 回転体を取り入れることの意味と妥当性の検討

5.2.2 本教材の特徴付け

5.2.3 本教材における指導目標と課題の設定

5.3 教材開発例2: 電灯によってできる影の軌跡

5.3.1 電灯によってできる影の軌跡を取り入れることの意味と妥当性の検討

5.3.2 本教材の特徴付け

5.3.3 本教材における指導目標と課題の設定

終章 研究のまとめと今後の課題

6.1 研究のまとめ

6.2 今後の課題

1. 研究の目的

我々は、3次元空間で生活をし、その中で様々なものの位置やそれらの関係を知覚し、場合によってそれらを動かすなどの操作を行う。空間図形指導においては、3次元の対象を2次元に落としてかいたり、立体模型を作って操作したり、またそれらをよんだりすることで、日常生活における空間的な素養を高めているのであり、図形をかいたり、構成したり、よんだりすることは、我々にとって不可欠な活動であると考ええる。

空間図形を2次元表示するとき、あるいは2次元表示した図形を解釈するときには、投影の考え方を利用し、特定の視点を定める。複数の視点を定め、それらを総合的にとらえることにより、図形を想像し、その特徴を的確に相手に伝えることができる場所に2次元表示をすることのよさがある。

一方、図形を構成するときには、図形を連続的に移動させたり、回転させたり、変形させたりするなどの動的な見方が必要となる。図形を目的に応じて、動かしたり静止させたりする見方は、図形を分析する際には重要な手段の一つであると考ええる。なぜなら、図形が静止した状態というのは、図形が動いている中のある瞬間の状態ととらえることができ、この1つ1つを理解することが、図形全体の構造や性質を理解することにつながると考えるためである。

2次元と3次元の関連付けの際に用いられる投影図や図形の動的な見方は、このような教育的価値を有しているのであるが、現在において、投影図、図形の動的な見方を用いて解決できる教材は質、量ともに十分ではない。そこで本研究では、図形の投影の見方すなわ

ち空間図形の2次元表示と、図形の動的な見方に焦点を当てた教材の開発を行うことを目的とする。

2. 中学校教科書における空間図形教材の問題分析

▶ 空間図形の理解をめざした学習活動

空間図形指導では、これまでに空間観念、空間認識や空間思考などの文言で、その育成を目的とした研究が行われてきており、具体的な学習活動によってその具現化が図られてきた。これらの研究では、それ自身が何かということを確認に定義するのではなく、具体的な学習活動を通して間接的に示されているものが多い。

『中学校数学指導資料 空間図形の指導』¹では、空間には無限の広がりがあり、次元によって異なる方向性を持ち、次元が高くなるにつれて自由度が増大するという性質をもつものであり、その中で空間図形をとらえるということを前提としている。空間図形をとらえるためには念頭操作を必要とし、そのためには空間の性質を理解していることが必要となるためであると考ええる。そして空間の認識というものを、例えば次のア～オのことを生徒ができることとして、具体的な学習活動と関連付けている(pp.13-16)。

- ア. 空間図形の抽出
- イ. 空間図形の図表現
 - (ア) 空間図形の概念や内部のしくみを示す図がかけること
 - (イ) 空間図形を投影や切断によってとらえ、それを表現すること
- ウ. 空間図形の構成
 - (ア) 平面図形の運動ととらえる
 - (イ) 展開図による構成
 - (ウ) 分解及び合成
- エ. 平面図形との関連において空間図形の性質をとらえる
- オ. 基本的な立体図形の計量

上記の内容から、空間図形指導における活動には、「かく」「構成する」「よむ」のいずれかが必ず伴うと考える。ところが、ア～オでは、「よむ」ことはそれほど強調されていない。しかしながら「イ. 空間図形の図表現」を2次元と3次元の関連付けという観点から見ると、「図表現」されたものをよみ取ることもイに内包すると考える。つまり、「かく」ことと「よむ」ことは表裏一体の関係なのである。また、エから読み取れることは、「構成する」ことと「よむ」こともまた、表裏一体の関係にあるということである。このことを踏まえ、本研究では空間図形指導における生徒の学習活動を、2次元と3次元の間で「かく」「構成する」「よむ」という3種類の過程が起こる活動としてとらえる。

▷ 教科書の問題分析の枠組みと方法

「かく」「構成する」「よむ」に着目し、問題を解決していく過程を概観し、以下のような教科書分析の枠組みを構築した。

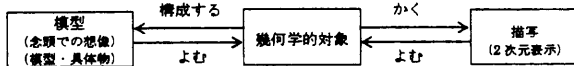


図1 教科書分析のための枠組み

枠組み中の対象は、B.Parzys (1988)² (図形 (figure), 描写 (drawing), 模型 (model)) にしたがう。しかし、これらは Parzys 自身のはっきりと定義しているわけではないため、ここで対象の定義を行っておく。

描写...空間図形が2次元表示された状態。

模型...念頭操作によって作られる空間図形

(模型①) および、具体的操作が可能な
模型や具体物 (模型②)。

「描写」は「幾何学的対象」や「模型」より低次元にある状態、「模型」は3次元における表現である。

図形を「かく／構成する」とときには、「図形」を考察するための方法として「描写／模型」が用いられる。そして、よむときには、「描写／模型」自身が考察の対象となる。対象となった「描写／模型」を解釈することにより、その表現に内在する新たな情報が得られる。Parzyszによれば、「図形」は文章が表しているものを指しているの、「それを定義している文章によって説明されている幾何学的対象」と定義されている。しかし本研究では、表現に内在する情報全体を対象としたい。そこで意味を、「それを定義している文章によって、及びその他の表現 (2次元表示, 模型) に内在している情報によって説明される対象」とし、Parzyszの「図形」を改め、「幾何学的対象」とすることにした。

▷ 教科書における空間図形教材の問題分析

教科書の問題を分析する目的は、空間図形の2次元表示の質的な変化をとらえること、そして教材開発のための視点を得ることである。分析には戦時中に使用されていた『数学第二類』, それ以降の教科書については、現在において中学校での使用頻度が最も高い教科書会社 (A社) のものを対象とする³。分析の単位は、空間図形に関連する単元内の問い、練習、単元におけるまとめの問題、章末問題、巻末問題などの各問題であり、最小単位は問われている対象とする。

教科書の問題を分析した結果、戦時中から昭和33年の学習指導要領準拠の教科書にかけては、図形をかくことと構成することを繰り返す問題が多い。すなわち、図1の枠組みの「模型」と「描写」を繰り返し行き来することで念頭に訴え、2次元と3次元の関連付けが行われるような問題が多いのに対し、それ

降の教科書では、図形をよむことが中心となっており、念頭よりむしろ視覚に訴える問題が多いことがわかった。

3. 空間図形の理解における投影図の役割

▶ 投影図を利用することの価値

本章では、空間図形の2次元表示のうち、投影図の扱いに焦点を当てる。

半田進(1999)は、これまでの投影図の取り扱いが、作図すること自体に重点が置かれてしまい、製図や技術・家庭科で扱われるような技術的な面に偏った指導になっているということが問題視している。前章で行った教科書分析において、その視点に立って投影図の問題を見ると、戦前や戦時中の投影図の扱いを、指導の観点で見たときにはそのように特徴づけられる。しかし、教材の観点で見直してみると、そこではただ技術を教え込んでいるのではなく、投影図を利用する過程を通して、図形への理解を促すことが想定されている。図形を分析する際には、複数の視点を定めて見るという投影の考え方の必要性はきわめて高いものである。投影図は現在の空間図形指導に積極的に取り入れるべきであると考える。

4. 図形の動的な構成における投影図の活用

▶ 図形の動的な見方の役割

図形の動的な見方は、動かした後の状態を、動かす前の状態の結果としてとらえるという移動としての見方と、図形が動いている様子を連続的にとらえるという軌跡としての見方の2通りがあると考えられる。

前者は、中学校数学においては、平面図形の移動が典型的な例である。移動の考えが図形指導に取り入れられるようになったのは、

「一つの多様体とその中に一つの変換群が与えられたとする；このとき、多様体に属する図形について、この群の変換で変わらないような性質を研究せよ」という幾何学の問題を提唱した、クラインの『エルランゲン・プログラム』⁴の思想が影響していると言われている(例えば、平林一栄,1991)⁵。しかし厳密には、作図の上での移動の考え方と変換の考え方は数学的に異なる。すなわち、移動の考え方は、同一平面上で図形が動かされるのであり、変換の考え方は、写像の考えであるため、座標平面(あるいは空間)そのものが移動することになるのである。

一方、後者の軌跡としての見方については、図形の移動だけに留まらず、図形の生成、あるいは変形の様子をとらえる際にも有効なはたらきをすると考える。前田隆一(1979)⁶は、図形の連続的な変化と図形の決定を関連付けている。すなわち、図形を連続的にとらえることによって、静的な図形を動いている図形の瞬間的な姿としてとらえることもできるし、軌跡に着目して図形を決定することもできることを述べている。また、軌跡の考えでは、次元の移動が起こる。高次の図形は、1つ下の次元の図形から生成されているものと考えられるのである。このとき、低次元の性質は、高次元の性質の中に保存される。この考え方は『中学校数学科指導資料 空間図形の指導』(文部省,1982)で挙げられている空間認識に関する学習活動の具体例の、「エ.平面図形との関連において空間図形の性質をとらえる」に相当する。次元の移動を考えることは、図形の構成要素を考えるということであり、図形を分析する際には、重要な着眼点となる。高次元の図形に対する理解を促す

ために、軌跡の考え方と次元の移動を関連付けて考えさせることを意図した指導を行うことが必要であると考える。

＞ 図形の動的な見方の概念規定

移動としての見方と、軌跡としての見方はまったく別のものではなく、一つの考えに統合することができるものとする。なぜなら、後者の見方をした結果が、前者の見方と解釈することも可能であるし、一つ一つの図形の移動が、軌跡の一部と考えることもできるからである。どちらの見方でも、念頭で図形が移動する様子を思い浮かべるときには、その過程を連続的にとらえているのである。例えば、線分の軌跡を考える場合、途中の過程の情報を得るまでは、図形の動的な見方は顕在化されない。途中の過程とは線分が動いている中の瞬間の姿である。それらを組み合わせて一連の動きととらえることで、点の軌跡がイメージとして頭に残る。ここで初めて図形を動的に見ていることになるのである。

このことから、図形の動的な見方をすることは、図形の連続的変化をとらえることであり、その際には軌跡の考えが伴うということがわかる。そこで本研究では、対象となっている図形の軌跡をイメージすることが、図形の動的な見方をしている状態であるととらえることにする。

＞ 図形の動的な構成に投影図を活用することの着想と方法

本研究では、対象となっている図形の動きの軌跡をイメージしている状態を、図形の動的な見方をしている状態であるとした。軌跡をイメージするための手がかりとなるのは、図形が動いている中の瞬間の姿をとらえ、それらを組み合わせるということであつた。こ

れらの原則を崩すことなく、図形の動的な構成の様子を投影図に表す方法を考えたとき、ポイントとなるのは「図形が動いている中の瞬間の姿を組み合わせる」ことである。図形が動いている中の瞬間の姿とは、図形が静止している状態と見ることもできる。投影図の本来の役割とは、静止した図形の観察や分析をすることにある。したがって、図形が動いている中の瞬間の状態を投影図にかき表すことは、その役割から外れていることにはならない。そしてその状態を複数かいたものを組み合わせたものが軌跡としてイメージされる。これが本研究における、図形の動的な見方であり、空間で起こっている動的な構成の様子を投影図で表すことができるということにある。投影図を活用することにより、図形を特定の視点から認識することができ、その視点から見た図形の動的な構成の様子を作図していくことで、学習者は、図形を動的に見ることがどのようなことなのか、また、空間では何が起っているのかを明確にすることができる。一連の作業を通して、学習者は図形をかく力、そして作図したものを動的にとらえることによって、図形を構成する力、よむ力を身につけることができると考える。

5. 教材の開発

＞ 教材開発例 1：投影図を用いた回転体の連続的表現

(1) 本教材の指導目標

本教材は、中学校第1年学年の、回転体の後半に位置づく。

教材のもつ最終的な目標は、図形の動的な構成を投影図表示する中で、かくことと構成することを繰り返し行い、図形をかく力、構成する力、よむ力を育成することにあるが、

その下位目標を次のように設定する。

投影図を動的な場面に適用することは、生徒にとって新しい図形観を身に着けさせることになる。図形の形状を確かめるためだけに用いるのではなく、空間で起こっている事象の分析を行うときにも用いることができることを知ることで、投影図の道具としての有用さを感じ、生徒自ら投影図を用いようとするようになることが第一のねらいである。

次に、図形の見方を伸長することである。従来、回転体では、回転軸と同一平面上にある平面図形を回転させていたが、回転軸とは異なる平面上にある図形を回転させることによって、生徒たちは、見慣れない、または、予想とは違った図形が現れることを知る。新たな発見があることを感得し、いろいろなものを回転させてみようとする意欲を高めることをねらいとする。

最後に、ねじれの位置や回転体の性質の理解を深めることである。2直線の関係のうち、ねじれの位置と他の関係との違いは何かを明確にする。投影図を用いた活動を行うことで、図形に対する分析的な見方を養うとともに、回転体の性質の理解を促す。

(2) 課題の設定とねらい

【課題1】 2本の線分 l と m がある。 l と m の関係にはどのようなものがあるか。身近にあるものを用いて、2線分 l と m の関係を考えてみましょう。

【課題1】の目的は、2線分の関係の理解の確認と、具体物による操作で2次元と3次元の関連付けを行うことである。

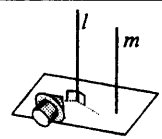
- ア. 平行である
- イ. 同一平面上にある (交わらない)
- ウ. 交わる (直交しない)
- エ. 直交する
- オ. 一方の線分がもう一方の線分と直交する直線上にある (交わらない)

カ. ねじれの位置の関係にある

キ. 一方の線分がもう一方の線分と垂直な平面上にある (エ, オ以外)

2線分の関係を細かく分類すると上記の7通りがある。しかし、イとウ、エとオあるいはカとキなど、それぞれを直線と考えれば、数学的に同値とみなせる関係が含まれるため、すべてが生徒から出てくることは期待できない。この後の線分の回転につなげるため、生徒の解答として出てきても、出てこなくても、数学的に同値であることに留意した上で、7通りの関係を確認する。

【課題2】 2本の線分 l と m がある。右の図のように線分 l をある平面に対して垂直に立てる。 $l \parallel m$ のとき、この図を真正面から見ると、どのような図がかけられるか。また、【課題1】で考えた l と m の関係でも同じように真正面から見た図をかき、なぜそのような図になるのかを検討してみましょう。



【課題1】で挙げた3次元にある線分を2次元に落として考えるために【課題2】を設定する。同一平面上にある2直線は一方向からの視点で表示することができるが、異平面上にある2直線は、一方向では的確にとらえることができない。空間図形を正確に分析するときには、少なくとも2つの視点を定める必要があるということを生徒に気づかせる。2線分関係を投影図表示し、続けて以下の課題を提示する。

【課題3】 課題1で考えた2線分の関係において、線分 l を回転軸として、線分 m を l の周りに1回転させたとき、線分 m はどのような図形をえがくか。また、その図形ができることをどのように説明しますか。

これまで、静止している対象にしか適用してこなかった投影図を、図形の動的な構成に適用する場面である。本課題の第一のねらいは、回転体の性質である、「上から見ると円になり、横から見ると対称図形になる」とこと、

投影図の考え方を結びつけることができることを気づかせ、生徒が【課題 2】でかいた図を用いて「この部分が回転するから、それに対応して…」というような回転体の説明ができるようになることである。回転体が構成されていく様子を投影図表示すると下のようになる。

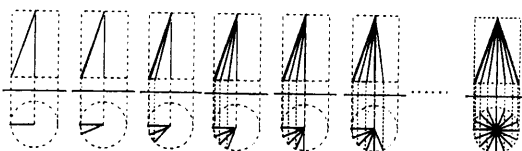


図2 円錐の作図過程

2 線分の関係のうち、ねじれの位置の線分の回転は知識として持っている生徒は少なく、空間で起こっていることを想像することが困難である。上の方法を利用することで、その様子も目に見える状態にすることができる。



図3
ねじれの位置にある線分の回転

「かく」、「構成する」、「よむ」の3つの過程を繰り返すことで、空間で起こっている事象についての認識を深めるとともに、2線分の関係についての理解や、回転体の理解を促すことが本課題の第二のねらいである。

▶ 教材開発例 2: 電灯によってできる影の軌跡

(1) 本教材の指導目標

本教材は、中学校第1年学年での扱いを想定している。

教材のもつ最終的な目標は、本研究の目的でもある、図形の動的な構成を投影図表示する中で、かくことと構成することを繰り返し行い、図形をかく力、構成する力、よむ力を

育成することにあるが、回転体のときと同様、下位目標を設定する。

回転体の教材におけるねらいの部分でも述べたが、教材の中では投影図を用いることを意図した課題が設定される。本来ならば、投影図は静止している図形の観察、分析を行うために活用されるのであり、動的な場面に適用することはこれまでの扱いはなかった。したがって、生徒はここで新しい図形観を身に付けることになる。ただ図形の形状を確かめるためだけに用いるのではなく、空間で起こっている事象の分析を行うときにも用いることができることを知ることで、投影図の道具としての有用さを感じ、投影図を自発的に用いることができるようにすることが第一のねらいである。

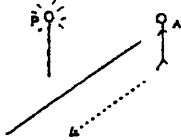
本教材は中学校第1学年での取り扱いを考えているが、原題となっている「影の問題」は、現在中学校第3学年の相似の文脈で出てくることが多い。そのような意味では、教材に幅を持たせて、学年間をまたがった指導を行うこともできるのではないかと考えている。したがって、中学校第1学年で扱う場合には、生徒が目的に応じた作図をし、それを観察することを通して、影の軌跡や空間図形の性質を直観的にとらえていくことをねらいとする。また、第3学年で扱うときには、論理的な部分に踏み込んで事象をとらえる力を身に付けることをねらいとする。

(2) 原題

以下の問題は、風間喜美江(1993)⁷が、生徒が「具体的な場面の問題で、空間をどう認識し、既習事項をどう活用し問題の解決をはかるか(p.44)」を調査することを目的として、中学校第1学年92名、高等学校第1学年73名、

大学第1年次142名を対象に行った調査問題の一部とその結果である。

2. A君は下の図のように、直、まっすぐな道を歩いている。道には、電灯Pがたっている。A君の影の頭の先はどのように動くだろうか。A君の影の頭の先の動きにあてはまるものを、①～⑤の中から1つ選び番号で答えなさい。また、それが正しいことを説明しなさい。



			中	高	大
		①	27	70	62
		②	10	8	10
		③	46	12	11
		④	9	7	14
		⑤	3	3	3
		無答	5	0	1

図4 調査問題およびその結果(風間,1993,pp.44-52)

この問題の正答は②であるが、正答している者はどの学年においても10%程度である。平面どうしの交線が直線であることや、相似の知識がある高校生や大学生でも、影の軌跡は曲線であると思ってしまう。風間自身、この問題をもとに相似の単元の指導例を挙げているが、その目的や価値は明記されていない。そこで本稿では、上記の問題をもとに、前章で記述した視点に立ち、教材の開発を行う。

(3) 課題の設定とねらい

【課題1】A君が夜、図のように電灯の前をまっすぐ歩くと、A君の影の頭の先はどのように動くか。

課題1は風間(1993)の調査問題と同じ内容である。本課題は影の頭が、光源とA君の頭を結ぶ半直線と、電灯とA君の足を結ぶ半直線との交点であることから、見取図や、投影図(図5)で連続的に構成していくことによ

って、A君が線分上を動く様子を表すことができる。投影図をかく際に配慮しなくてはならないのは、真横のどこに視点を定めるかである。例えば、A君が歩いてくる正面に視点を置いた場合、平面図でのA君の動きは表現することができるが、立面図ではA君が歩いてくる正面から見てい

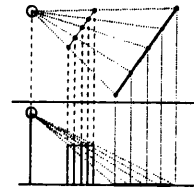


図5 課題1 投影図1

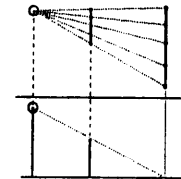


図6 課題1 投影図2

るため、A君の動きをとらえることができない。つまり、平面図では動いているが、立面図が変化しないので、空間内で起こっていることをとらえることができないのである(図6)。ここでは、適切な位置に視点を定めるといことがどういうことかを十分に留意して指導する必要があると考える。

本課題を通して、2平面(光源とA君の頭の軌跡でできる平面と地面)の交線は直線となるという幾何学的知識を伝えることができる。

なお、影の頭の軌跡が線分になることは、三角形の相似を利用することによって、演繹的に証明することもできる。

【課題2】A君が夜、電灯の前を歩くと、A君の動き方によって、A君の影の頭の先の動きはどのように変化するだろうか。

課題2では、例えばA君が三角形や円の周上を動くときを考える。課題の本質は課題1と変わらないので、三角形のときの軌跡は容易に出せる。この課題を通してわかることは、A君が平面上を歩くとときにできる影の軌跡は、A君が動く軌道と相似な図形であるということである。

曲線上を動く場合、【課題1】のように2平面の交線が直線となるという性質は消えてしまう。しかし図7の投影図では、光線の軌跡が斜円錐を描

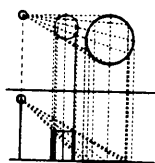
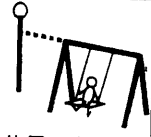


図7
課題2 投影図

いていることがわかる。ここが図を連続的に表示することのよさであると考えられる。本課題を通して、錐体の底面と平行な平面で切断すると、底面と相似な図形が現れるという幾何学的知識を伝えることができる。

【課題3】A君が図のようにブランコにのっているとき、A君の影の頭の先はどのように動くだろうか。ただし、電灯はブランコの回転軸の延長線上にあるものとし、光源は回転軸よりも高い位置にあるものとする。



【課題3】は、光源の位置が影の軌跡の形を左右する。電灯の位置を任意にしてしまうと、作図がより複雑になってしまい、生徒の混乱を招くと予想する。そのため、授業では、条件をしばり、「電灯はブランコの回転軸の延長線上にあるものとし、光源は回転軸よりも高い位置にあるものとする」と提示する。本

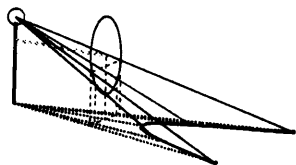


図8 ブランコの問題の見取図

課題を、見取図を用いて表すと、図8のようになるが、ブランコの円運動の様子も作図によって正確に表すことが難しく、正確な影の軌跡をかくのは生徒にとって困難である。本課題を解決するための土台作りとして、【課題2】では、影の軌跡の実形をかくための手段として、投影図を用いている。この課題におい

ても投影図を用いて解決することはできないかということを生徒に気づかせ、投影図を使って影の軌跡を作図する活動へと移行する。

ところで、本課題で議論となるのは、投影図をかくための視点をどこに定めたらよいかということである。影の軌跡を知りたいので、真上からの視点は不可欠である。もう一つの視点は、A君が円運動をしていることがわかる方向、すなわち回転軸の延長線上に定めるのが適切である。こうすることにより、ブランコの円運動と真上から見たA君の動きとを関連付けることができる。ここは、視点を適切に定めることの指導の必要性が高まる場面である。

授業では、生徒がかく投影図の電灯の高さもそれぞれ異なると思われる。影の軌跡は電灯の高さによって、双曲線、放物線、楕円の3通りの曲線が現れる。光源と回転軸との鉛直方向の距離が、回転の半径より小さいとき、影の軌跡は双曲線を描き(図9①)、等しいときは放物線(②)、大きくなると楕円を描く(③)。

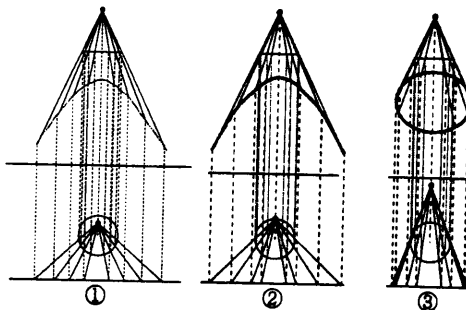


図9 ブランコの問題の投影図

ここで現れる曲線は円錐曲線である。円錐曲線という概念についての指導は特に行わないが、かいた図を円錐と見ることや、地面が円錐を切断する平面として見ることを通して異なる曲線が現れることは伝えていきたい。

【課題4】太陽がA君のちょうど真横の方角に昇ったとき、ブランコにのっているA君の影の頭の先はどのように動くだろうか。



【課題3】では光線が描く円錐を考えたが、太陽光線を平行光線と見ると、円柱を考えることになる。課題3と同様に地面を、円柱を切断する平面と考えると、影の軌跡は楕円の一部となる。太陽の位置を様々に変えていくと、別の曲線が現れる。

課題全体を通して留意しなければならないのは、場面に与えられている仮定を考慮するという点である。これは原題を発案した風間自身も指導例の中で考えている。例えば、課題1, 2でA君は電灯より背が低いこと、電灯やA君は地面に対し垂直に立っているということである。課題3ではA君の頭は、常にブランコと同心円上にあることを仮定した。

本来投影図は、直交する3平面によって決まるものであるが、本教材ではそのような技術的な面を避け、自由に視点を動かせるものとし、2画面で3次元の事象の認識が可能となるような課題設定をした。3画面を用いる場合、図が複雑になると予想したためである。

6. まとめと今後の課題

本論文で開発した2つの教材には、いずれにも、生徒に「かく」、「構成する」、「よむ」の3つの活動を繰り返し行わせることを意図した課題が組み込まれている。この活動こそが、2次元と3次元を関連付ける能力を高め、空間図形の理解を促すことへとつながるものであると考える。開発した2つの教材が、現在の空間図形指導にとって価値あるものであり、空間図形指導における目標を達成するために、十分な役割を果たすことができると言

うことができるだろう。

本論文において、研究の第一の目的である、「生徒に3次元空間で動的な見方を必要とする対象を2次元に落として連続的に表現させることを意図した教材の開発を行うこと」は達成し、理論上の価値を示すことはできた。しかしながら、開発した2つの教材は、まだ実践には出ておらず、その有効性は未知のものである。また、開発した教材はトピック的に扱うのではなく、現在の空間図形の単元の中に組み込むことを想定している。開発した教材への円滑な導入を行うためには、投影図や回転体の導入やその後の指導が重要な鍵となるのは言うまでもない。投影図、回転体、そして本教材を含めた、空間図形全体の単元構成を行い、実際に授業を行うことを通して、教材の有効性を示すことが今後の課題である。

¹ 文部省(1982). 中学校数学指導資料 空間図形の指導. 第一法規出版.

² Parzysz, B (1988). "Knowing" VS "Seeing" Problem of the plane representation of space geometry figures. Educational Studies in Mathematics Vol.19.

³ 青伸社 HOME> TOPICS > 教科書採択表 <青伸社ホームページ URL <http://www.ikushin.co.jp/index.html>>

⁴ 寺坂英孝, 大西正男 訳 (1977). ヒルベルト 幾何学の基礎 クライン エルランゲン・プログラム. 共立出版. 初版は昭和45年.

⁵ 平林一栄 (1991). 図形の指導内容の概観と問題点の考察. 新・中学校数学指導実例講座第3巻 図形. 金子書房. pp.3-34.

出石隆 (1988). 図形の指導内容の理論的考察. 新・中学校数学指導講座 第5巻 図形. 金子書房. pp.3-33.

⁶ 前田隆一 (1979). 算数教育論—図形指導を中心として—. 金子書房.

⁷ 風間喜美江 (1993). 空間概念の育成について. 兵庫教育大学大学院学校教育研究科修士論文.

(もろほし ゆうた
町田市立南成瀬中学校
〒194-0045 東京都町田市南成瀬 7-7-1)